math

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 181

Heft 3

Ausgegeben am 25. November 1939

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1939

Band 181. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Jung, Heinrich W. E., Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. III. 125

Neumer, Walter, Die dreigliedrigen Berührungstransformationsgruppen der Ebene, welche keine Invariante erster Ordnung besitzen. I 133

Kaluza jun., Theodor, Untersuchung fastperiodischer Funktionen mittels äquidistanter Zahlenmengen 153

Schilling, Bernhard, Methoden zur numerischen Auswertung unendlicher Reihen mit reellen, konstanten Gliedern. 177

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher.

III. Über die Zahl δ der Zeuthen-Segreschen Invariante.

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle-Saale.

Eine Definition der Zeuthen-Segreschen Invariante für Büschel mit beliebigen Singularitäten ist zum ersten Male von mir (1912, [1]) gegeben [1]). Eine vereinfachte Darstellung stammt von M. Oehlert [2]. Dieselbe Aufgabe hat dann 1920 L. Godeaux [3], dessen Arbeit mir nicht zugänglich gewesen ist, behandelt und 1934 L. Campedelli [4], [5], der auch gezeigt hat, daß in irrationalen Körpern die Zahl δ dieser Invariante nicht negativ sein kann.

In dieser Arbeit soll bewiesen werden:

Die Zahl δ der Zeuthen-Segreschen Invariante ist für alle Büschel in irrationalen Körpern und für Büschel von Primteilern in rationalen und halbrationalen Körpern nicht negativ.

Für Büschel von zerfallenden ganzen Divisoren kann δ in rationalen und halbrationalen Körpern negativ sein.

§ 1. Die Invariante.

Die Zeuthen-Segresche Invariante Z für ein Büschel $\langle \mathfrak{G} \rangle$ des Geschlechtes p von ganzen Divisoren des Geschlechtes q ist gegeben durch

$$Z + 4 = \delta + 4(p-1)(q-1) - N. \tag{1}$$

Wegen $Z + 4 + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 12(p_a + 1)$ ist also

$$\delta = 12(p_a + 1) - (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) - 4(p-1)(q-1) + N. \tag{2}$$

Für $p > 0$ ist immer $N = 0$. Für $p = 0$ ist

$$N = 2\nu - f, \tag{3}$$

wo ν die Zahl der Zweige eines allgemeinen Divisors $\mathfrak{G}_a$ ist, die durch die festen Stellen gehen, und wo f die Zahl der festen Stellen ist. Da durch jede feste Stelle mindestens ein Zweig von $\mathfrak{G}_a$ geht, so ist

$$N \geqq 0; \tag{4}$$

das Gleichheitszeichen steht nur, wenn keine festen Stellen vorhanden sind.

Zerfallen alle $\mathfrak{G}$, so besteht fast jedes $\mathfrak{G}$ aus etwa r Primteilern eines Büschels. Haben diese das Geschlecht q', so ist q zu bestimmen aus

$$q - 1 = r(q' - 1). \tag{5}$$

---

[1]) Die Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

§ 2. Rationale Körper.

Ein rationaler Körper K kann keinen Unterkörper der Dimension 1 haben, dessen Geschlecht von 0 verschieden ist, so daß es in ihm nur rationale Büschel gibt. Daher ist $p = 0$. Außerdem ist $p_a = 0$, so daß nach (2)

$$\delta = 4q + N + 8 - (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}). \tag{6}$$

Nach [6], § 12, Satz III ist aber in rationalen Körpern $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) \leqq 8$, also nach (4) und (6)

$$\delta \geqq 4q.$$

Sind die $\mathfrak{G}$ aus $\langle \mathfrak{G} \rangle$ im allgemeinen Primteiler, so ist $q \geqq 0$ und

$$\delta \geqq 0.$$

Zerfallen alle $\mathfrak{G}$, so kann $\delta < 0$ sein, wie das folgende einfache Beispiel zeigt. K sei der Körper der rationalen Funktionen von x, y. Wir wählen die einfache Stellendefinition in Bezug auf x, y, bei der x und y an allen Stellen bestimmte Werte annehmen, und bei der

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = 8,$$

also nach (6)

$$\delta = 4q + N. \tag{7}$$

Das Büschel $\langle \mathfrak{G} \rangle$ bestehe aus den Zählern von $y^r - \xi$, wo ξ der Parameter des Büschels ist. Jedes $\mathfrak{G}$ zerfällt in r Primteiler eines Büschels $\langle \mathfrak{P} \rangle$, das aus den Zählern von $y - \eta = y - \sqrt[r]{\xi}$ besteht. Daher ist das Geschlecht q' der $\mathfrak{P}$ gleich 0 und nach (5)

$$q - 1 = r(q' - 1) = -r.$$

Ferner ist $N = 0$, da y an allen Stellen einen bestimmten Wert annimmt. Also ist nach (7)

$$\delta = -4(r-1) < 0 \quad \text{für} \quad r \geqq 2.$$

§ 3. Halbrationale Körper.

K sei der Körper (x, y, z) mit der Bedingung

$$\varphi(y, z) = 0,$$

wo φ ein unzerlegbares Polynom ist. Der durch $\varphi = 0$ definierte Körper $\varkappa$ der Dimension 1 sei vom Geschlecht π. Es ist $\pi > 0$, da sonst K rational wäre.

In einem halbrationalen Körper ist

$$p_a = -\pi \quad \text{und ferner} \quad (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) \leqq -8(\pi - 1), \tag{8}$$

wo das Gleichheitszeichen bei einfacher Stellendefinition steht ([6], § 12, Satz XI).

Wir unterscheiden drei Fälle:

a) Das Büschel $\langle \mathfrak{G} \rangle$ von Primteilern $\mathfrak{G}$ sei irrational, also $N = 0$. Es gibt in K nur ein solches Büschel, und zwar das, dessen Primteiler $\mathfrak{P}$ den Stellen von $\varkappa$ eineindeutig entsprechen. Für dies Büschel $\langle \mathfrak{P} \rangle$ ist

$$p = \pi, \quad q = 0, \quad N = 0,$$

so daß nach (2) und (8)

$$\delta = -(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) - 8(\pi - 1) \geqq 0,$$

wo bei einfacher Stellendefinition das Gleichheitszeichen steht.

b) Es sei $\langle \mathfrak{G} \rangle$ ein lineares Büschel von Primteilern $\mathfrak{G}$, also $p = 0$. $\mathfrak{G}_0$ sei ein Primteiler aus $\langle \mathfrak{G} \rangle$ ohne Besonderheiten, so daß das Geschlecht von $\mathfrak{G}_0$ gleich q ist. Da $\mathfrak{G}_0$ nicht zu den Primteilern des Büschels $\langle \mathfrak{P} \rangle$ gehört. so werden die Größen aus $\varkappa$ für $\mathfrak{G}_0 = 0$ nicht konstant, woraus folgt, daß $\varkappa$ ein Unterkörper des Körpers $\mathfrak{G}_0$ ist. Daher ist $q \geqq \pi$, und aus (2), (4) und (8) folgt $\delta \geqq 0$.

c) Ist $\langle \mathfrak{G} \rangle$ ein Büschel von zerfallenden ganzen Divisoren, so kann δ kleiner als Null sein, wie das folgende Beispiel zeigt. $\langle \mathfrak{G} \rangle$ sei das lineare Büschel, das aus den Zählern von $y - \xi$ besteht, wo ξ der Parameter ist. Ist die Gleichung $\varphi(y, z) = 0$ in z vom Grade n, so zerfällt der Zähler von $y - \xi$ in $\varkappa$ in n Primteiler und ebenso in K, so daß jedes $\mathfrak{G}$ aus n Primteilern $\mathfrak{P}_i$ eines Büschels $\langle \mathfrak{P} \rangle$ besteht.

Da $\langle \mathfrak{G} \rangle$ linear ist, so ist $p = 0$. Da ferner y an allen Stellen einen bestimmten Wert annimmt, so ist $N = 0$. Das Geschlecht q' der $\mathfrak{P}_i$ ist Null, so daß nach (5) $q - 1 = -n$. Wählen wir noch die einfache Stellendefinition, so daß $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = -8(\pi - 1)$, so erhalten wir aus (2)

$$\delta = -4(\pi + n - 1) < 0.$$

§ 4. Irrationale Körper.

1. Ist K irrational, so können wir die Formel (2) nicht benutzen, da wir keine obere Grenze für $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ kennen. Wir müssen die Definition von δ verwenden. Es genügt, den Fall zu betrachten, wo $N = 0$, wo also keine festen Stellen vorhanden sind. Den anderen Fall werden wir auf diesen zurückführen.

Ein Divisor $\mathfrak{H}$ eines Büschels $\langle \mathfrak{H} \rangle$ ohne feste Stellen liefert zu der Zahl δ den Beitrag

$$\delta(\mathfrak{H}) = \{2\sigma(\mathfrak{H}') - \mu(\mathfrak{H}')\} - (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}') + (\mathfrak{H}/\mathfrak{H}', \mathfrak{K}). \tag{9}$$

Darin ist, in verschiedene Primteiler zerlegt,

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_\lambda, \tag{10}$$

wenn

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1} \mathfrak{P}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{P}_\lambda^{\alpha_\lambda}. \tag{11}$$

Ferner ist der Beitrag einer Stelle S, durch die $\mathfrak{H}'$ geht, zu $2\sigma(\mathfrak{H}') - \mu(\mathfrak{H}')$ gleich $\left(\frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial v}\right)$, gleich der Zahl der Schnittpunkte, die die Kurven $\frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial u} = 0$ und $\frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial v} = 0$ in der Stelle S haben. Diese Zahl ist dann und nur dann Null, wenn $\mathfrak{H}'$ in S einen einfachen Punkt hat, sonst größer als Null.

2. Das Büschel $\langle \mathfrak{H} \rangle$ bestehe im allgemeinen aus Primteilern.

Da wir angenommen haben, daß keine festen Stellen vorhanden sind, so ist

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = 0, \quad (\mathfrak{H}', \mathfrak{H}) = 0, \quad (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{H}) = 0. \tag{12}$$

Da der Divisor $\mathfrak{H}$ in (11) stetig in einen Primteiler übergeht, so müssen die $\mathfrak{P}_i$ durch Schnittpunkte zusammenhängen, so daß die $\mathfrak{P}_i$ einander in mindestens $\lambda - 1$ Stellen treffen. In jeder dieser Stellen hat $\mathfrak{H}'$ mindestens einen Doppelpunkt, und jede liefert daher zu $2\sigma(\mathfrak{H}') - \mu(\mathfrak{H}')$ mindestens den Betrag 1, sodaß

$$2\sigma(\mathfrak{H}') - \mu(\mathfrak{H}') \geqq \lambda - 1 \geqq 0. \tag{12a}$$

Das Geschlecht q eines allgemeinen Divisors $\mathfrak{H}$ kann nicht Null sein, da K sonst nach einem Satze von M. Noether halbrational wäre. Da $\mathfrak{H}$ im allgemeinen Primteiler ist und keinen mehrfachen Punkt hat, so folgt unter Benutzung von (12)

$$2q - 2 = (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) \geqq 0. \tag{13}$$

Erstens sei $\lambda = 1$, also $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1} = \mathfrak{P}^\alpha$, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{P}$. Aus (12) folgt dann

$$0 = (\mathfrak{P}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^\alpha) = \alpha(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}), \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = 0 \tag{14}$$

und aus (13)

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = \alpha(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) \geqq 0, \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) \geqq 0. \tag{15}$$

Nach (9), (12), (12a) und (15) wird

$$\delta(\mathfrak{H}) \geqq (\alpha - 1)(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) \geqq 0, \tag{16}$$

und zwar ist $\delta(\mathfrak{H})$ dann und nur dann gleich Null, wenn $\mathfrak{P}$ keinen mehrfachen Punkt hat, und wenn außerdem $\alpha = 1$ oder $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) = 0$. Im ersten Falle ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$ ein allgemeiner Primteiler des Büschels. Im zweiten Falle folgt aus (13) und (15) $q = 1$, so daß $\langle \mathfrak{H} \rangle$ ein Büschel von Primteilern des Geschlechtes 1 ist.

Zweitens sei $\lambda > 1$. Aus (11) und (12) folgt

$$(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{H}) = \sum_k \alpha_k (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k) = 0,$$

$$-(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i) = \sum_k \frac{\alpha_k}{\alpha_i} (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k), \quad (k \neq i). \tag{17}$$

Da $\mathfrak{P}_i$ mindestens einen der anderen Primteiler $\mathfrak{P}_a$ treffen muß, so ist

$$(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i) < 0. \tag{18}$$

Ferner ergibt sich

$$-\sum (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i) = \sum_{i<k} \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_i} + \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \right) (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k),$$

also wegen (10)

$$-(\mathfrak{H}', \mathfrak{H}') = -\sum_i (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i) - 2 \sum_{i<k} (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k) = \sum_{i<k} \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_i} + \frac{\alpha_i}{\alpha_k} - 2 \right) (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k). \tag{19}$$

Für positives reelles ϱ ist aber immer

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} - 2 \geqq 0,$$

so daß nach (19)

$$-(\mathfrak{H}', \mathfrak{H}') \geqq 0.$$

Nach (10) und (11) ist

$$(\mathfrak{H}/\mathfrak{H}', \mathfrak{K}) = \sum_i (\alpha_i - 1)(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{K}). \tag{20}$$

Wäre etwa $(\mathfrak{P}_\alpha, \mathfrak{K}) < 0$, so würde $\mathfrak{P}_\alpha$ ein vollkommener Primteiler (vgl. [7]) sein, da nach (18) immer $(\mathfrak{P}_\alpha, \mathfrak{P}_\alpha) < 0$. Diesen können wir uns durch eine E^{-1}-Transformation in einen Primteiler zweiter Art verwandelt denken, wodurch wegen $(\mathfrak{P}_\alpha, \mathfrak{H}) = 0$ das Büschel keinen Basispunkt erhält. Daher können wir annehmen, daß unter den $\mathfrak{P}_i$ keine vollkommenen Primteiler vorkommen, so daß

$$(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{K}) \geqq 0$$

und nach (20)

$$(\mathfrak{H}/\mathfrak{H}', \mathfrak{K}) \geqq 0.$$

Aus (9), (12), (12a) folgt jetzt

$$\delta(\mathfrak{H}) \geqq \lambda - 1 \geqq 0. \tag{20a}$$

Wegen

$$\delta = \sum_{\mathfrak{H}} \delta(\mathfrak{H})$$

ist dann $\delta \geqq 0$.

Wir haben angenommen, daß kein $\mathfrak{H}$ einen vollkommenen Primteiler enthält. Derartige Primteiler haben wir durch E^{-1}-Transformationen in Primteiler zweiter Art verwandelt. Im ganzen seien so τ Primteiler erster in solche zweiter Art übergeführt.

Machen wir diese Transformationen rückgängig, so wird dadurch $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ um τ kleiner, also δ um τ größer, da $\delta + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ ungeändert bleibt. Daher wird dann sogar

$$\delta \geqq \lambda - 1 + \tau \geqq \tau.$$

Ferner ergibt sich, daß dann und nur dann $\delta = 0$, wenn immer $\lambda = 1$, und wenn außerdem entweder die $\mathfrak{H}$ Primteiler ohne mehrfache Stellen sind, oder wenn das Geschlecht q gleich 1 ist. Aber Körper vom Geschlecht 1 haben nur *einen* Modul. Würde dieser vom Parameter des Büschels abhängen, so würde er eine algebraische Funktion dieses Parameters sein und mindestens eine Nullstelle haben. Unter den $\mathfrak{H}$ kommt dann mindestens ein Primteiler des Geschlechtes 0 vor, also mit einem Doppelpunkt, so daß $\delta > 0$ sein würde. Der Modul muß daher für $\delta = 0$ vom Parameter unabhängig sein, und alle $\mathfrak{H}$ haben denselben Modul, sind birational äquivalent, so daß auch in diesem Fall alle $\mathfrak{H}$ Primteiler ohne mehrfache Stellen sind. Daher haben wir:

Ist in einem irrationalen Körper $\langle \mathfrak{H} \rangle$ ein Büschel ohne Basispunkte, dessen Divisoren fast alle Primteiler sind, so ist δ dann und nur dann Null, wenn alle $\mathfrak{H}$ Primteiler ohne mehrfache Punkte sind.

3. $\langle \mathfrak{H} \rangle$ habe Basispunkte, so daß das Büschel linear ist, also $p = 0$. Im allgemeinen sei $\mathfrak{H}$ Primteiler.

Die Basispunkte seien durch eine Stellentransformation aufgelöst, wodurch die Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\varrho$ in Primteiler erster Art $\mathfrak{A}_i$ übergehen mögen. Die kanonische Klasse $(\mathfrak{K})$ werde zu $(\mathfrak{K}')$. Für ein allgemeines $\mathfrak{H}$ sei

$$s(\mathfrak{H}) = \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1^{\nu_1} \mathfrak{A}_2^{\nu_2} \cdots \mathfrak{A}_\varrho^{\nu_\varrho}.$$

Setzen wir

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\mathfrak{F},$$

so geht das Büschel $\langle \mathfrak{H} \rangle$ in das Büschel $\langle \mathfrak{F} \rangle$ über. Da $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{H}$ entsprechende Primteiler ist, wenn $\mathfrak{H}$ Primteiler ist, so ist das Geschlecht von $\mathfrak{F}$ auch q. Ist δ' die zu $\langle \mathfrak{F} \rangle$ gehörende Zahl δ, so besteht wegen der Invarianz von $Z + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ die Gleichung

$$\delta - 4(q-1) - N + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \delta' - 4(q-1) + (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}').$$

Da $(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) - \varrho$, so folgt

$$\delta = \delta' - \varrho + N. \tag{21}$$

S sei eine der festen Stellen von $\langle \mathfrak{H} \rangle$. Durch S mögen gehen

ν_0 Zweige mit beweglichen Tangenten,

ν_i Zweige mit der festen Tangente t_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Die Tangente t_i habe die Gleichung $v - a_i u = 0$. Der Beitrag N_S von S zu N ist dann

$$N_S = 2\nu_0 + \sum_{i=1}^{m} 2\nu_i - 1. \tag{22}$$

Bei S hat die Gleichung von $\langle \mathfrak{H} \rangle$ die Form

$$G_1(u, v; \xi) + \xi(v - a_1 u)^{\beta_1} (v - a_2 u)^{\beta_2} \cdots (v - a_m u)^{\beta_m} = 0, \tag{23}$$

wenn $\nu_0 = 0$, und die Form

$$(v - a_1 u)^{\beta_1} \cdots (v - a_m u)^{\beta_m} [g_1(u, v) - \xi g_2(u, v)] + G_2(u, v; \xi) = 0, \tag{24}$$

wenn $\nu_0 > 0$. Hierin sind g_1 und g_2 homogene Polynome ohne gemeinsamen Faktor desselben Grades, etwa des Grades l, und G_1 und G_2 sind gewöhnliche Potenzreihen von u, v, die mindestens mit Gliedern der Dimension

$$1 + \Sigma\beta_i \quad \text{und} \quad 1 + l + \Sigma\beta_i$$

beginnen.

Auf S wenden wir die E-Transformation $u = u_1,\ v = u_1 v_1$ an, wodurch $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{A}_1$ übergehe. Das aus $\langle \mathfrak{H} \rangle$ entstehende Büschel $\langle \mathfrak{H}^{(1)} \rangle$ wird für die aus S hervorgehenden Stellen erster Ordnung gegeben durch

$$u_1 \bar{G}_1(u_1, v_1; \xi) - \xi (v_1 - a_1)^{\beta_1} \cdots (v_1 - a_m)^{\beta_m} = 0, \tag{25}$$

wenn $v_0 = 0$, und durch

$$(v_1 - a_1)^{\beta_1} \cdots (v_1 - a_m)^{\beta_m} \{g_1(1, v_1) - \xi g_2(1, v_1)\} + u_1 \bar{G}_2(u_1, v_1; \xi) = 0, \tag{26}$$

wenn $v_0 > 0$. Hierin sind $\bar{G}_1$ und $\bar{G}_2$ gewöhnliche Potenzreihen von u_1, v_1.

Da für alle Stellen erster Ordnung $u_1 = 0$ ist, so ergibt sich, daß die m Stellen S_i, nämlich $(u_1, v_1) = (0, a_i)$, feste aus S entstandene Stellen des Büschels $\langle \mathfrak{H}^{(1)} \rangle$ sind, und zwar entspricht S_i der festen Tangente t_i. Da bei der Transformation jedem Zweige eines Primteilers wieder ein Zweig entspricht, so gehen durch S_i genau ν_i Zweige eines allgemeinen Primteilers $\mathfrak{H}^{(1)}$. Ist $N^{(1)}$ die zu $\langle \mathfrak{H}^{(1)} \rangle$ gehörende Zahl N, so wird daher der Beitrag $N_S^{(1)}$ der aus S hervorgegangenen Stellen zu $N^{(1)}$

$$N_S^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} (2\nu_i - 1) = \sum_{i=1}^{m} 2\nu_i - m. \tag{27}$$

Da im übrigen alles ungeändert bleibt, so wird nach (22), (27)

$$N - N^{(1)} = N_S - N_S^{(1)} = 2\nu_0 + m - 1,$$

$$N - N^{(1)} - 1 = 2\nu_0 + m - 2 = f_1, \tag{28}$$

wo f_1 zur Abkürzung eingeführt ist. Im allgemeinen ist $f_1 \geqq 0$. Nur wenn $\nu_0 = 0$, $m = 1$, ist $f_1 < 0$, und zwar gleich -1. Wenn aber $\nu_0 = 0$, so gibt es nach (25) unter den $\mathfrak{H}^{(1)}$ einen Divisor, der durch u_1, also durch $\mathfrak{A}_1$, teilbar ist, nämlich den durch $\xi = 0$ gegebenen. Für $f_1 = -1$ ist also einer der Divisoren $\mathfrak{H}^{(1)}$ durch $\mathfrak{A}_1$ teilbar.

Durch die weiter auszuführenden $\varrho - 1$ E-Transformationen gehe der Reihe nach $\mathfrak{a}_2$ in $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{a}_3$ in $\mathfrak{A}_3, \ldots, \mathfrak{a}_\varrho$ in $\mathfrak{A}_\varrho$ über, ferner $\langle \mathfrak{H}^{(1)} \rangle$ in $\langle \mathfrak{H}^{(2)} \rangle$, $\langle \mathfrak{H}^{(2)} \rangle$ in $\langle \mathfrak{H}^{(3)} \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{H}^{\varrho-1} \rangle$ in $\langle \mathfrak{H}^{(\varrho)} \rangle = \langle \mathfrak{F} \rangle$. Die zu $\langle \mathfrak{H}^{(i)} \rangle$ gehörende Zahl N sei $N^{(i)}$. Dann gilt nach (28), da $N^{(\varrho)} = 0$,

$$N - N^{(1)} - 1 = f_1, \quad N^{(1)} - N^{(2)} - 1 = f_2, \ldots, N^{(\varrho-1)} - 1 = f_\varrho,$$

woraus durch Addition folgt

$$N - \varrho = \Sigma f_i.$$

Von den f_i wissen wir, daß

$$f_i \geqq -1,$$

und daß für $f_i = -1$ unter den $\mathfrak{H}^{(i)}$, also auch unter den $\mathfrak{F}$ ein Divisor vorkommt, der $\mathfrak{A}_i$ enthält.

Unter den Primteilern $\mathfrak{A}_i$ mögen τ vorkommen, die in einem $\mathfrak{F}$ enthalten sind, sodaß

$$N - \varrho \geqq -\tau. \tag{29}$$

Die $\mathfrak{A}_i$ seien jetzt so geordnet, daß

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots, \mathfrak{A}_\tau$$

diejenigen sind, die in einem $\mathfrak{F}$ enthalten sind; z. B. seien $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l$ Faktoren von $\mathfrak{F}_1$. Es sei

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{A}_1^{\alpha_1} \mathfrak{A}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{A}_l^{\alpha_l} \mathfrak{P}_{l+1}^{\alpha_{l+1}} \cdots \mathfrak{P}_\lambda^{\alpha_\lambda},$$

wo die $\mathfrak{P}_i$ von den $\mathfrak{A}_i$ und voneinander verschiedene Primteiler sein sollen. Nun kann $\mathfrak{F}_1$ nicht nur aus Primteilern $\mathfrak{A}_i$ bestehen, weil dann der $\mathfrak{F}_1$ entsprechende Divisor $\mathfrak{H}$

aus $\langle \mathfrak{H} \rangle$ gleich 1 sein würde. Also ist

$$\lambda \geqq l + 1.$$

Da $\langle \mathfrak{F} \rangle$ keine Basispunkte hat, ist nach (20a)

$$\delta'(\mathfrak{F}_1) \geqq \lambda - 1 \geqq l,$$

also

$$\delta' \geqq \Sigma l = \tau,$$

und nach (29)

$$\delta' + N - \varrho \geqq 0.$$

Wegen (21) folgt

$$\delta \geqq 0.$$

4. $\langle \mathfrak{H} \rangle$ sei ein Büschel von zerfallenden Divisoren.

Ein allgemeiner Divisor $\mathfrak{H}$ besteht aus Primteilern $\mathfrak{P}_i$ eines Büschels $\langle \mathfrak{P} \rangle$, etwa aus r.

Die zu $\langle \mathfrak{P} \rangle$ gehörenden Zahlen δ, N, p, q seien δ', N', p', q'. Die Zahl der festen Stellen von $\langle \mathfrak{H} \rangle$ und $\langle \mathfrak{P} \rangle$ ist dieselbe, etwa f. Gehen durch eine feste Stelle ν'_s Zweige eines allgemeinen Primteilers $\mathfrak{P}$, so gehen durch sie $\nu_s = r\nu'_s$ Zweige eines allgemeinen Divisors $\mathfrak{H}$, so daß

$$\nu = r\nu'$$

und

$$(30) \quad N = 2\nu - f = 2r\nu' - f = r(2\nu' - f) + (r-1)f = rN' + (r-1)f.$$

Nach (5) ist

$$(31) \quad q - 1 = r(q' - 1).$$

Die Körper, deren Stellen die Divisoren der Büschel $\langle \mathfrak{H} \rangle$ und $\langle \mathfrak{P} \rangle$ eineindeutig zugeordnet sind, seien $\varkappa$ und $\varkappa'$. Jeder Stelle von $\varkappa'$ entspricht ein Primteiler $\mathfrak{P}$, also ein Divisor $\mathfrak{H}$, nämlich der, in dem $\mathfrak{P}$ enthalten ist, und damit eine Stelle von $\varkappa$. Umgekehrt entspricht einer Stelle von $\varkappa$ ein Divisor $\mathfrak{H}$, so daß ihr r Primteiler $\mathfrak{P}$ entsprechen, nämlich die in $\mathfrak{H}$ enthaltenen, und damit r Stellen von $\varkappa'$, so daß $\varkappa'$ ein Körper vom Grade r über dem Körper $\varkappa$ ist.

Ist w die Relativverzweigungszahl von $\varkappa'$ in Bezug auf $\varkappa$, so ist

$$(32) \quad p' - 1 = r(p-1) + \frac{w}{2}.$$

Nach (2) ist

$$\begin{aligned} 12(p_a + 1) - (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) &= \delta + 4(p-1)(q-1) - N \\ &= \delta' + 4(p'-1)(q'-1) - N', \end{aligned}$$

also

$$\delta - \delta' = 4(p'-1)(q'-1) - 4(p-1)(q-1) + N - N'.$$

Wegen (30), (31), (32) folgt hieraus

$$\begin{aligned} \delta - \delta' &= 4(q'-1)\{p' - 1 - r(p-1)\} + (r-1)(N' + f), \\ \delta - \delta' &= 2w(q'-1) + 2\nu'(r-1). \end{aligned}$$

Da nach 3. $\delta' \geqq 0$ und da ferner $q' > 0$, weil K sonst halbrational wäre, so folgt

$$\delta \geqq 0.$$

Also:

In einem irrationalen Körper ist die Zahl δ eines jeden Büschels nicht negativ.

Ist δ_0 der Wert von δ bei einfachster Stellendefinition, und δ der Wert für dasselbe Büschel bei irgendeiner anderen Stellendefinition, so ist $\delta = \delta_0 + \varrho$, wo ϱ die Zahl der vorhandenen ausgezeichneten Primteiler ist. Da $\delta_0 \geqq 0$, so ist

$$\delta \geqq \varrho.$$

Literatur.

1. H. W. E. Jung, Über die Zeuthen-Segresche Invariante, Rendiconti Palermo **34** (1912).

2. L. Godeaux, Sur l'invariant de Zeuthen-Segre d'une surface algébrique, Mémoires de la Société des Sciences du Hainaut **66** (1920).

3. M. Oehlert, Über die Definition der Zeuthen-Segreschen Invariante, Dissertation Halle (1934). Abgedruckt im Journal für reine u. angew. Mathematik **171** (1934).

4. L. Campedelli, Sul computo dell'invariante di Zeuthen-Segre per una superficie algebrica, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei di Roma (6) **19** (1934).

5. L. Campedelli, Ancora sul computo dell'invariante di Zeuthen-Segre per una superficie algebrica, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei di Roma (6) **19** (1934).

6. H. W. E. Jung, Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. I., Journal für reine u. angew. Mathematik **180** (1939).

7. H. W. E. Jung, Stellentransformation in algebraischen Körpern zweier Veränderlicher, Acta math. **68** (1937).

Eingegangen 17. Januar 1939.

Die dreigliedrigen Berührungstransformationsgruppen der Ebene, welche keine Invariante erster Ordnung besitzen. I.

Von *Walter Neumer* in Worms.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Abhandlung bildet eine Ergänzung zu einer früheren Arbeit[1]). Sie behandelt in der Hauptsache eine gewisse Kategorie von dreigliedrigen Berührungstransformationsgruppen der Ebene, nämlich diejenigen, denen gegenüber keine Funktion $I(x, y, y')$ invariant bleibt. Diese Gruppen besitzen die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie, abgesehen von konstanten Faktoren, ∞^1 *Bogenelemente*

$$\zeta(x, y, y')\,dx + v(x, y, y')\,dy \quad (dy - y'dx = 0)$$

invariant lassen. Zu der genannten Kategorie von G_3 gehören u. a. auch die G_3, welche mit der projektiven G_3 eines Kegelschnittes, d. h. der G_3 eines nichteuklidischen Kegelschnitt-Bogenelementes ähnlich sind, ferner die mit der G_3 der euklidischen Bewegungen ähnlichen Gruppen. Diese beiden wichtigen Gruppentypen und ihre invarianten Bogenelemente erscheinen somit hier in einem allgemeineren Zusammenhange.

Erster Abschnitt.

Die für alle dreigliedrigen ebenen Berührungstransformationsgruppen ohne Invariante erster Ordnung gemeinsame Form der Definitionsgleichungen, durch welche sie als Untergruppen einer mit der projektiven G_8 ähnlichen Gruppe dargestellt werden.

§ 1. Einiges über das Rechnen mit Berührungstransformationen.

1. Nach Gąsiorowski[2]) bedienen wir uns der folgenden Operationen (Op.n) bezüglich einer Funktion $f(x, y, y')$:

$$(1) \qquad \partial_1 f = f_1 = f_x + y' f_y, \quad \partial_2 f = f_2 = f_{y'}, \quad \partial_3 f = f_3 = f_y,$$

so daß das vollständige Differential df so geschrieben werden kann:

$$(1') \qquad df = f_1 dx + f_2 dy' + f_3(dy - y'dx).$$

Schreiben wir $(f_i)_j = f_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, dann gilt die Beziehung

$$(2) \qquad f_3 = f_{12} - f_{21} = (\partial_2 \partial_1),$$

welche es ermöglicht, daß man bereits mit den zwei Op.n ∂_1, ∂_2 allein auskommt. Die Op. $f_{i_1 \ldots i_s}(i_1, \ldots, i_s = 1, 2)$ bezeichnen wir als eine Op. s-ter Stufe. Unter der Op. nullter

---

[1]) W. Neumer, Die allgemeinste mit der projektiven G_8 der Ebene ähnliche Gruppe von Berührungstransformationen, dieses Journal **173** (1935).

[2]) Gąsiorowski, Über die Definitionsgleichungen der endlichen kontinuierlichen Berührungstransformationsgruppen der Ebene, Dissertation Gießen = Prace matematyczno-fizyczne **26** (1914).

Stufe f_0 wollen wir die Funktion f selber verstehen. Die vier Op.n 2. Stufe $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ sind voneinander unabhängig, während zwischen den Op.n 3. Stufe von f die Beziehungen

$$f_{13} = f_{31}, \quad f_{23} = f_{32} \tag{3}$$

oder, wegen (2),

$$2f_{121} = f_{112} + f_{211}, \quad 2f_{212} = f_{221} + f_{122} \tag{4}$$

stattfinden. Überhaupt hat man zwischen den Op.n s-ter Stufe $f_{i_1 \dots i_s}$ $(s \geqq 3)$ immer eine Reihe von Relationen, welche wir die *∂-Relationen* nennen wollen. Die Relationen zwischen den Op.n s-ter Stufe, d. h. die ∂-Relationen s-ter Stufe gewinnt man aus den ∂-Relationen $(s-1)$-ter Stufe durch Ausführung der Op.n ∂_1, ∂_2 sowie durch Substitution von f_1, f_2 an die Stelle von f. Indessen sind die so gewonnenen Relationen nicht unabhängig voneinander[3]). Man erkennt unmittelbar die Gleichberechtigung der Indizes 1, 2 in den ∂-Relationen.

Die Op.n ∂_1, ∂_2 eignen sich ohne weiteres auch zur Behandlung von Systemen partieller Differentialgleichungen (Diffgl.n), wozu nur bemerkt sei, daß dann die Integrabilitätsbedingungen (Int.Bed.n) erhalten werden, indem man — sofern es sich um ein System handelt, dessen allgemeinste Lösung nur von endlich vielen Konstanten abhängt — die ∂-Relationen bis einschließlich $(s+2)$-ter Stufe heranzieht, vorausgesetzt, daß erst die Op.n s-ter Stufe der gesuchten Funktionen vermöge des Systems partieller Diffgl.n sämtlich durch die Op.n $(s-1)$-ter und niedrigerer Stufe ausgedrückt werden können[4]).

2. Wir werden in der Folge vorwiegend mit Op.n der Form

$$\partial_\varepsilon f = f_\varepsilon = f_1 - \varepsilon(x, y, y')\, f_2, \quad \partial^{\varepsilon'} f = f^{\varepsilon'} = f_2 - \varepsilon'(x, y, y')\, f_1 \tag{5}$$

arbeiten. Ist $\varepsilon\varepsilon' = 1$, dann gilt

$$f^{\varepsilon'} = -\frac{f_\varepsilon}{\varepsilon}, \; f_\varepsilon = -\frac{f^{\varepsilon'}}{\varepsilon'} \quad (\varepsilon\varepsilon' = 1). \tag{6}$$

Wenn $\alpha \neq \beta$ zwei beliebige Funktionen von x, y, y' sind, dann können die Op.n ∂_1, ∂_2 u. a. ersetzt werden durch eines der beiden Op.n-Paare

$$f_\alpha = f_1 - \alpha f_2, \; f_\beta = f_1 - \beta f_2, \tag{7}$$

$$f^{\alpha'} = f_2 - \alpha' f_1, \; f^{\beta'} = f_2 - \beta' f_1 \quad (\alpha\alpha' = \beta\beta' = 1). \tag{7'}$$

Vorerst beschäftigen wir uns mit den Op.n (7). Schreiben wir

$$\beta - \alpha = \omega, \; \omega\bar{\omega} = 1; \; \beta_\alpha - \alpha_\beta = \pi, \tag{8}$$

dann folgt aus (7)

$$f_2 = \bar{\omega}(f_\alpha - f_\beta), \; f_1 = \bar{\omega}(\beta f_\alpha - \alpha f_\beta), \tag{9}$$

$$f_2 g_1 - f_1 g_2 = \bar{\omega}\,(f_\alpha g_\beta - f_\beta g_\alpha), \tag{10}$$

$$f_3 = \bar{\omega}\,(f_{\beta\alpha} - f_{\alpha\beta} + \pi f_2), \tag{11}$$

während die Identitäten (4) den beiden folgenden

$$\begin{aligned} 2f_{\alpha\beta\alpha} - f_{\alpha\alpha\beta} - f_{\beta\alpha\alpha} &= -(\pi + \omega_\alpha) f_3 + (\pi_\alpha + \alpha_{\alpha\beta} - \alpha_{\beta\alpha}) f_2, \\ 2f_{\beta\alpha\beta} - f_{\beta\beta\alpha} - f_{\alpha\beta\beta} &= (\pi + \omega_\beta) f_3 + (-\pi_\beta + \beta_{\beta\alpha} - \beta_{\alpha\beta}) f_2 \end{aligned} \tag{12}$$

äquivalent sind. Vertauschung von α mit β vertauscht die beiden Identitäten (12) miteinander.

Wollten wir die Op.n (7′) betrachten, so würden wir die den Relationen (9) bis (12) entsprechenden mittels der Substitution

$$S = (\partial_1 \partial_2)\,(\alpha\alpha')\,(\beta\beta') \quad (\alpha\alpha' = \beta\beta' = 1) \tag{13}$$

erhalten, welche (7) und (7′) ineinander überführt.

---

[3]) A. a. O. [2]), § 1.

[4]) A. a. O. [2]), Theorem 1.

3. Die Transformation (Trf.) der drei Veränderlichen x, y, y'

(14) $$\mathfrak{x} = X(x, y, y'),\ \mathfrak{y} = Y(x, y, y'),\ \mathfrak{y}' = P(x, y, y')$$

ist bekanntlich eine Berührungstransformation (B.T.), sobald es einen Faktor

$$\Delta(x, y, y') \neq 0$$

gibt, so daß die Identität

(14′) $$d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}' d\mathfrak{x} = \Delta(dy - y'dx)$$

stattfindet. Wegen (1′) liefert (14′):

(15) (a) $Y_1 = PX_1,\ Y_2 = PX_2$ (b) $\Delta = X_1P_2 - X_2P_1$.

Die Diff.gl.n (15a) bestimmen ∞^1 Lösungen Y + const., wenn die folgenden Int.Bed.n erfüllt sind[5]):

(16) $$\begin{aligned} X_2P_{11} + X_1P_{12} + 2P_1X_{21} &= P_2X_{11} + P_1X_{12} + 2X_1P_{21}, \\ X_1P_{22} + X_2P_{21} + 2P_2X_{12} &= P_1X_{22} + P_2X_{21} + 2X_2P_{12}. \end{aligned}$$

Bei Vertauschung von ∂_1, ∂_2 gehen die beiden Relationen (16) ineinander über (weil das gleiche für die Relationen (4) und (15a) zutrifft, aus denen sie hergeleitet sind). Ferner vertauscht sich in jeder Gleichung (16) die rechte mit der linken Seite, wenn X mit P vertauscht wird. Der innere Grund für diese Gleichberechtigung von X und P liegt in folgendem Umstande: Läßt man auf die B.T. (14) die Dualität

(17) $$\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{y}',\ \tilde{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y},\ \tilde{\mathfrak{y}}' = \mathfrak{x}$$

folgen, dann erhält man die B.T.

(18) $$\tilde{\mathfrak{x}} = P(x, y, y'), \quad \tilde{\mathfrak{y}} = \widetilde{Y}(x, y, y') = XP - Y, \quad \tilde{\mathfrak{y}}' = X(x, y, y'),$$

für welche die Beziehungen gelten müssen, welche sich aus (16) durch Vertauschung von X, P ergeben.

Schreiben wir in Analogie zu (1)

(19) $$\partial_{\mathrm{I}} f = f_{\mathrm{I}} = f_{\mathfrak{x}} + \mathfrak{y}' f_{\mathfrak{y}}, \quad \partial_{\mathrm{II}} f = f_{\mathrm{II}} = f_{\mathfrak{y}'}, \quad \partial_{\mathrm{III}} f = f_{\mathrm{III}} = f_{\mathfrak{y}},$$

dann gelten wegen (14′) und (1′) die Trf.s-Formeln

(20) $$f_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\Delta}(P_2f_1 - P_1f_2), \quad f_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\Delta}(-X_2f_1 + X_1f_2).$$

Sie bleiben einzeln erhalten, wenn ∂_1, ∂_2 vertauscht werden; sie wechseln ihre Plätze bei gleichzeitiger Vertauschung von X mit P und ∂_{I} mit ∂_{II}.

4. Setzen wir bezüglich der allgemeinsten B.T. (14)

(21) $$\alpha = \frac{P_1}{P_2}, \quad \beta = \frac{X_1}{X_2} \qquad (P_\alpha = X_\beta = 0),$$

dann stellen die beiden Diffgl.n

(22) $$y'' + \alpha(x, y, y') = 0, \quad y'' + \beta(x, y, y') = 0$$

das allgemeinste Paar gewöhnlicher Diffgl.n 2. O. dar, welches durch B.T. in das Paar $y'' = 0,\ y'' = \infty$ verwandelt werden kann[6]). Die Diffgl.n (22) gestatten daher eine G_8 von B.T.n der Ebene, die allgemeinste mit der projektiven (proj.n) G_8 der Ebene ähnliche B.T.s-Gruppe, welche in der Folge mit $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta) = \mathcal{G}_8(\beta, \alpha)$ bezeichnet wird[7]). Die Funktionen α, β befriedigen also die beiden charakteristischen Diff.gl.n, welche in der unter [1]) angeführten Abhandlung hergeleitet sind und sich mittels der Abkürzungen

(23) $$\boxed{\begin{aligned} \overline{\alpha} &= \overline{\omega}_\alpha - 2\overline{\omega}\,\alpha_2, & \overline{\overline{\alpha}} &= 3\overline{\omega}\,\alpha_3 - \alpha_2\overline{\alpha}\,, \\ \Lambda &= \overline{\alpha}_\alpha + \overline{\overline{\alpha}} + \alpha_{22}, & \mathsf{M} &= \Lambda_\alpha + 4(-\alpha_{23} + \overline{\alpha}\alpha_3) \end{aligned}}$$

folgendermaßen darstellen[8]):

---

[5]) A. a. O. [2]), § 4.

[6]) A. a. O. [1]), (44′).

[7]) A. a. O. [1]), § 3, **3.**

[8]) A. a. O. [1]), (95), (96); die dort auftretende Größe N ist in den Formeln (23), (24) des Textes vermieden, da $\mathsf{N} = \Lambda_2 + \overline{\alpha}_3$.

$$(24)\qquad \boxed{\begin{array}{c} \mathsf{M}_\alpha + 6\alpha_{33} + \alpha_2 \mathsf{M} + 3\alpha_3 \Lambda = 0\,, \\ \Lambda_{22} - 2\overline{\omega}\mathsf{M}_2 + 2(2\overline{\alpha}_{23} + 3\overline{\omega}_{33}) - 3(\overline{\omega}\Lambda)_3 + \overline{\alpha}(\Lambda_2 + 4\overline{\alpha}_3) - \overline{\omega}_2 \mathsf{M} = 0. \end{array}}$$

Das System (24) muß natürlich bei Vertauschung von α mit β reproduziert werden.

Zwei Diffgl.n (22) bzw. zwei Größen α, β, welche durch die Beziehungen (24) verknüpft sind, wollen wir zueinander *polar* nennen.

Mit Rücksicht auf (10) und (21) folgt aus (15b) und (9)

$$(25)\qquad \text{(a)}\ \Delta = -\overline{\omega} X_\alpha P_\beta \qquad \text{(b)}\ X_\alpha = \omega X_2,\ P_\beta = -\omega P_2.$$

Die Trf.s-Formeln (20) lauten jetzt vermöge (25a) und (10):

$$(26)\qquad f_{\mathrm{I}} = \frac{f_\alpha}{X_\alpha}, \quad f_{\mathrm{II}} = \frac{f_\beta}{P_\beta}.$$

Bei Ausübung der formalen Substitution

$$(27)\qquad (XP)\,(\partial_{\mathrm{I}}\partial_{\mathrm{II}})\,(\alpha\beta)$$

tauschen die beiden Gleichungen der Gleichungspaare (26), (21), (25b) ihre Plätze aus, während Δ in $-\Delta$ übergeht.

Ersetzt man in (12) f durch P bzw. X, dann kommt wegen (21), (11), (25b)

$$(28)\qquad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{array}{l} P_{\beta\alpha\alpha} = \overline{\omega}(\pi + \omega_\alpha)\, P_{\beta\alpha} + \overline{\omega}(\pi_\alpha + \alpha_{\alpha\beta} - \alpha_{\beta\alpha} - \overline{\omega}\pi(\pi + \omega_\alpha))\, P_\beta, \\ 2P_{\beta\alpha\beta} - P_{\beta\beta\alpha} = \overline{\omega}(\pi + \omega_\beta)\, P_{\beta\alpha} + \overline{\omega}(\pi_\beta + \beta_{\alpha\beta} - \beta_{\beta\alpha} - \overline{\omega}\pi(\pi + \omega_\beta))\, P_\beta \end{array} \\ \text{(a*)} & \begin{array}{l} X_{\alpha\beta\beta} = \overline{\omega}(\pi + \omega_\beta)\, X_{\alpha\beta} + \overline{\omega}(\pi_\beta + \beta_{\alpha\beta} - \beta_{\beta\alpha} - \overline{\omega}\pi(\pi + \omega_\beta))\, X_\alpha, \\ 2X_{\alpha\beta\alpha} - X_{\alpha\alpha\beta} = \overline{\omega}(\pi + \omega_\alpha)\, X_{\alpha\beta} + \overline{\omega}(\pi_\alpha + \alpha_{\alpha\beta} - \alpha_{\beta\alpha} - \overline{\omega}\pi(\pi + \omega_\alpha))\, X_\alpha. \end{array} \end{array}$$

(28 a*) findet man aus (28a) mittels der Substitution (27).

Die Relationen (16) lassen sich in die Form

$$(29)\qquad \frac{2X_{\alpha\beta}}{X_\alpha} + \frac{P_{\beta\beta}}{P_\beta} - \overline{\omega}(\pi + \omega_\beta) = 0, \quad \frac{2P_{\beta\alpha}}{P_\beta} + \frac{X_{\alpha\alpha}}{X_\alpha} - \overline{\omega}(\pi + \omega_\alpha) = 0$$

bringen, am einfachsten, indem man die Größe Y in (12) einsetzt und die mit (15a) gleichbedeutenden Relationen

$$(30)\qquad Y_\alpha = PX_\alpha,\ Y_\beta = 0$$

berücksichtigt. Dabei braucht etwa nur die erste Relation (29) ausgerechnet zu werden, worauf die zweite sich mittels der Substitution (27) sofort hinschreiben läßt (wegen der Symmetrie der Gleichungen (16) bezüglich X, P).

5. Wenn wir die Op.n (7′) verwenden, dann können wir die den Relationen der vorangehenden Ziffer entsprechenden bzw. gleichwertigen einfach hinschreiben, indem wir die Substitution (13) vornehmen. Hinsichtlich der Gleichungen (21), (25b), (26), (28), (29) liegt dies auf der Hand, ebenso, daß $S\Delta = -\Delta$ wird. Bezüglich der Relationen (24) ist zu bedenken, daß diese für alle Größen α, β der Form (21) charakteristisch sind, wo X, P den Diff.gl.n (16) genügen. Folglich müssen für die reziproken Größen α', β'

$$(31)\qquad \alpha' = \frac{P_2}{P_1},\ \beta' = \frac{X_2}{X_1} \quad (P^{\alpha'} = X^{\beta'} = 0),$$

welche sich von α, β in (21) durch Vertauschung von ∂_1, ∂_2 unterscheiden, wegen der Indizes-Symmetrie in den Relationen (16) und in den ∂-Relationen solche Beziehungen gelten, wie sie aus (24) hervorgehen, wenn dort α', β', ∂_2, ∂_1 anstatt α, β, ∂_1, ∂_2 geschrieben wird. (Zu dieser Ziffer vgl. unten Satz 4.)

§ 2. Die allgemeine Form der Definitionsgleichungen der Gruppen G_3^2.

Die G_3 von B.T.n der Ebene ohne Differential-Invariante (Diffinv.e) 1. O. $I(x, y, y')$ besitzen naturgemäß eine Diffinv.e 2. O. $I^{(2)}(x, y, y', y'')$. Daraus nehmen wir den Anlaß,

diese G_3 in der Folge kurz mit G_3^2 zu bezeichnen. Jede Gruppe G_3^2 wird definiert durch ein System von vier Diffgl.n

$$(32) \qquad M_{ij} = \binom{ij}{1} M_1 + \binom{ij}{2} M_2 + \binom{ij}{0} M \qquad (i, j = 1, 2)$$

für die charakteristische Funktion (ch. Fu.) $M(x, y, y')$ ihrer allgemeinen infinitesimalen Transformation (inf. Trf.); unter den Zeichen $\binom{ij}{k}$ sind gewisse von x, y, y' abhängige Koeffizienten verstanden. Diese Behauptung läßt sich leicht erschließen aus dem

Satz 1. *Die B.T.s-Gruppen der Ebene, welche eine Diffinv.e 1. O. $I(x, y, y')$ besitzen, sind die Gruppen, unter deren Definitionsgleichungen (Defgl.n) eine von erster Stufe vorkommt.*

Bei eingliedrigen Gruppen ist dieser Satz trivial. Ferner liefert die Forderung, daß die Funktion $I(x, y, y')$ die inf. B.T. $U(x, y, y')$ gestatten solle, eine Defgl. 1. Stufe für U.

Ist andererseits unter den Defgl.n einer mehr als eingliedrigen Gruppe eine von 1. Stufe vorhanden, etwa der Form

$$(33) \qquad U_1 = \varepsilon U_2 + \nu U,$$

dann muß die Gleichung (33) gegenüber der Gruppe invariant (inv.) bleiben; dabei bleibt dann auch die zu der Gleichung (33) kovariante[9]) Diffgl. $y'' + \varepsilon = 0$ gegenüber der Gruppe inv. Die Invarianzbedingung

$$(34) \qquad -U_{11} + \varepsilon(U_{12} + U_{21}) - \varepsilon^2 U_{22} + \varepsilon_1 U_2 - \varepsilon_2 U_1 - \varepsilon_3 U = 0$$

der Diffgl. $y'' + \varepsilon = 0$ gegenüber der inf. B.T. U liefert vermöge (33) die Beziehung

$$(35) \qquad \nu_1 = \varepsilon \nu_2 - \nu^2 - \varepsilon_2 \nu - \varepsilon_3,$$

welche notwendig und hinreichend dafür ist, daß durch (33) die unendliche Gruppe einer Inv.n $I(x, y, y')$ definiert wird[10]). Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Die notwendigen und hinreichenden Beziehungen, welche zwischen den Koeffizienten $\binom{ij}{k}$ bestehen müssen, damit (32) eine G_3 definiert, sind erstens die Int.Bed.n und zweitens die Relationen, welche der Forderung entspringen, daß zugleich mit U, V auch der Klammerausdruck[11])

$$(36) \qquad \{UV\} = W = U_2 V_1 - V_2 U_1 - (UV_3 - VU_3)$$

eine Lösung von (32) darstelle. Verstehen wir unter $i_1, \ldots, i_s$ und $j_1, \ldots, j_t$ irgend zwei Komplexionen der Indizes 0, 1, 2, 3, α, β u. dgl., dann läßt sich der Ausdruck (36) mit Hilfe der Abkürzung

$$(37) \qquad U_{i_1 \ldots i_s} V_{j_1 \ldots j_t} - V_{i_1 \ldots i_s} U_{j_1 \ldots j_t} = (i_1 \ldots i_s, j_1 \ldots j_t)$$

so schreiben

$$(38) \qquad \{UV\} = W = (2, 1) - (0, 3).$$

Vermöge (32) werden sämtliche Op.n von W lineare homogene Ausdrücke in $(2, 1)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$. Setzen wir dementsprechend

$$(39) \qquad W_{i_1 \ldots i_s} = u^{(0)}_{i_1 \ldots i_s)}(x, y, y')\,(2,1) + u^{(2)}_{i_1 \ldots i_s)}(x, y, y')\,(0,1) + u^{(1)}_{i_1 \ldots i_s)}(x, y, y')\,(0,2)^{12}),$$

---

[9]) A. a. O. [1]), § 3, **2**; § 4, **2**.

[10]) A. a. O. [1]), § 4, **2** (s. auch unten § 10).

[11]) A. a. O. [2]), Satz 5.

[12]) Die Schreibweise $f_{i)}$ dient zur Unterscheidung von der Op. f_i.

dann besitzt der Rang der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} u_{0)}^{(0)} & u_{0)}^{(2)} & u_{0)}^{(1)} \\ u_{1)}^{(0)} & u_{1)}^{(2)} & u_{1)}^{(1)} \\ u_{2)}^{(0)} & u_{2)}^{(2)} & u_{2)}^{(1)} \end{vmatrix} \quad (u_{0)}^{(0)} = 1) \tag{40}$$

die folgende, ihrer Natur nach gegenüber der allgemeinsten B.T. invariante Bedeutung:

Satz 2. *Die Derivierte*[13]) *der durch* (32) *definierten* G_3^2 *ist r-gliedrig, wenn r der Rang der Determinante* (40) *ist* ($r > 0$).

Denn es bestehen ja genau $3 - r$ lineare homogene Gleichungen zwischen

$$W, W_1, W_2,$$

d. h. r unter diesen Op.n bleiben unabhängig.

Ist $I^{(2)}(x, y, y', y'')$ die Diffinv.e 2. O. der G_3^2 (32), dann werden die ∞^1 inv.n Diffgl.n 2. O. der G_3^2 durch $I^{(2)} = \text{const.}$ repräsentiert. Denken wir sie uns in der Form $y'' + \varepsilon(x, y, y') = 0$, dann liefert die Invarianzbedingung (34) vermöge (32) die folgenden drei Diffgl.n

$$\begin{gathered} \varepsilon_2 = -\binom{22}{1}\varepsilon^2 + \left(\binom{12}{1} + \binom{21}{1}\right)\varepsilon - \binom{11}{1}, \quad \varepsilon_1 = \binom{22}{2}\varepsilon^2 - \left(\binom{12}{2} + \binom{21}{2}\right)\varepsilon + \binom{11}{2}, \\ \varepsilon_3 = -\binom{22}{0}\varepsilon^2 + \left(\binom{12}{0} + \binom{21}{0}\right)\varepsilon - \binom{11}{0} \end{gathered} \tag{41}$$

zur Bestimmung von ε; ihre Integrabilität muß auf Grund der Relationen zwischen den $\binom{ij}{k}$ sichergestellt sein.

§ 3. Über die verschiedenen Typen von Gruppen G_3^2.

Um die verschiedenen Typen von G_3^2 zu charakterisieren, könnte man daran denken, die einzelnen gegenüber der allgemeinsten B.T. inv.n Möglichkeiten aufzusuchen, welche für die Realisierung der notwendigen und hinreichenden Relationen bestehen, denen die $\binom{ij}{k}$ genügen müssen, damit (32) eine G_3 definiert. Wir verzichten jedoch wegen der Umständlichkeit der erforderlichen Rechnungen auf ein solches Verfahren und gehen von vornherein von den kanonischen Vertretern aus, welche Lie für die in Rede stehenden Gruppentypen angegeben hat.

Da jede G_3^2 ∞^1 Diffgl.n 2. O. inv. läßt, kann sie durch geeignete B.T. in eine projektive (proj.e) Gruppe übergeführt werden[14]); unter ihren durch (41) bestimmten inv.n Diffgl.n $y'' + \varepsilon = 0$ gibt es daher wenigstens ein polares Paar (22), welches eine Obergruppe $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ der G_3^2 bestimmt.

Nach Lie ist jede proj.e G_3^2 proj. gleichberechtigt mit einer der folgenden Gruppen[15]):

$$\begin{gathered} \text{(a) } p + xq,\ xp + 2yq,\ (x^2 - y)\,p + xyq\ (\infty^5) \quad \text{(b) } yp,\ xp - yq,\ xq\ (\infty^4) \\ \text{(c) } p, q, \mathrm{a}xp + \mathrm{b}yq (\mathrm{a} \neq \mathrm{b})\ (\infty^4) \quad \text{(c*) } q, xq, (\mathrm{b} - \mathrm{a})xp + \mathrm{b}yq (\mathrm{a} \neq \mathrm{b})\ (\infty^4) \\ \text{(d) } q, p + xq, xp + 2yq\ (\infty^5) \quad \text{(e) } xp, q, yq\ (\infty^5) \\ \text{(f) } p, q, xp + (x + y)q\ (\infty^4) \quad \text{(f*) } q, xq, p + yq (\infty^4) \quad \text{(g) } p, q, xq\ (\infty^3). \end{gathered} \tag{42}$$

p, q bedeuten dabei die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$. Zu jeder Gruppe der Tabelle (42) ist in Klammern die Anzahl der mit ihr proj. gleichberechtigten angegeben.

---

[13]) Wenn die endlich oder unendlich vielen inf. Trf.n $\ldots, Xf, \ldots, Yf, \ldots$ eine Gruppe in n Veränderlichen erzeugen, dann erzeugen die inf. Trf.n (XY) insgesamt eine Untergruppe, die sog. (erste) Derivierte der Gruppe.

[14]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Abschn. 3, Kap. 4, § 19, Satz 1.

[15]) A. a. O. [14]), Abschn. 3, Tabelle S. 106/107.

(42a) ist die proj.e G_3 des Kegelschnittes $x^2 - 2y = 0$, (42b) die Derivierte der proj.n G_4

$$(43) \qquad yp,\ xp - yq,\ xq;\ xp + yq,$$

der proj.n Gruppe des Nullpunktes und der unendlich fernen Geraden. (42g) ist die Derivierte der G_5

$$(44) \qquad p,\ q,\ xq;\ xp,\ yq,$$

der proj.n Gruppe des Linienelementes, welches von der unendlich fernen Geraden und dem unendlich fernen Punkte der y-Achse gebildet wird.

Die Gruppen (42 c, c*) und (42 f, f*) sind zueinander dualistisch (z. B. durch die Dualität (17)); die übrigen Gruppen (42) sind zu sich selber dualistisch.

Die einzigen Gruppen (42) mit dreigliedriger Derivierter sind die Gruppen (42a, b). Diese Gruppen sind miteinander ähnlich. Zunächst verwandelt die Punkt-Trf. (P.T.)

$$(45) \qquad \bar{x} = x + \sqrt{x^2 - 2y}, \quad \bar{y} = x - \sqrt{x^2 - 2y}$$

die Gruppe (42a) in

$$(45') \qquad \bar{p} + \bar{q}, \quad \bar{x}\bar{p} + \bar{y}\bar{q}, \quad \tfrac{1}{2}(\bar{x}^2\bar{p} + \bar{y}^2\bar{q})\,.$$

Die Gruppe (45′) geht dann vermöge der B.T.

$$(46) \quad \mathfrak{x} = \frac{\bar{x}\sqrt{\bar{y}'} - \bar{y}}{\sqrt{\bar{y}'} - 1}, \quad \mathfrak{y} = \frac{2c\sqrt{\bar{x} - \bar{y}}\sqrt[4]{\bar{y}'}}{\sqrt{\bar{y}'} - 1}, \quad \mathfrak{y}' = \frac{c(\sqrt{\bar{y}'} + 1)}{\sqrt{\bar{x} - \bar{y}}\sqrt[4]{\bar{y}'}} \quad ((\sqrt[4]{\bar{y}'})^2 = \sqrt{\bar{y}'})\,,$$

wo c eine beliebige Konstante, in die Gruppe

$$(46') \qquad \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{p} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{y}\mathfrak{q}, \quad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}^2\mathfrak{p} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{q})$$

über[16]), welche ihrerseits durch die proj.e Trf.

$$(47) \qquad \bar{\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}, \quad \bar{\mathfrak{y}} = \frac{1}{\mathfrak{y}}$$

in die Gruppe

$$(47') \qquad \bar{\mathfrak{y}}\bar{\mathfrak{p}}, \quad \tfrac{1}{2}(\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{p}} - \bar{\mathfrak{y}}\bar{\mathfrak{q}}), \quad -\tfrac{1}{2}\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{q}},$$

also in die Gruppe (42b) übergeführt wird. Die inf. Trf.n (42a), (45′), (46′), (47′) entsprechen einander in der angegebenen Reihenfolge. Die zu (46) inversen Gleichungen lauten

$$(48) \quad \bar{x} = \mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{y}\mathfrak{y}' + 2c^2}, \quad \bar{y} = \mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{y}\mathfrak{y}' - 2c^2}, \quad \bar{y}' = \frac{(\mathfrak{y}\mathfrak{y}' + 2c^2)^2}{(\mathfrak{y}\mathfrak{y}' - 2c^2)^2}\,.$$

Die mit (42a), also auch mit (42b) ähnlichen B.T.s-Gruppen bezeichnen wir in der Folge mit $\tilde{\mathcal{G}}_3$.

Bezüglich jeder Gruppe (42c) geht vermöge der proj.n Trf. $\bar{x} = y$, $\bar{y} = x$ das Verhältnis a : b in seinen reziproken Wert über. Ebenso sind natürlich zwei Gruppen (42c*) mit reziproken Parametern a : b proj. gleichberechtigt. Setzen wir daher

$$(49) \quad \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = 2\mathrm{c}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \mathrm{c} \pm \sqrt{\mathrm{c}^2 - 1}, \quad \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \mathrm{c} \mp \sqrt{\mathrm{c}^2 - 1},$$

dann können wir dem Wert c den Typus aller mit derjenigen Gruppe (42c) ähnlichen B.T.s-Gruppen zuordnen, für welche a : b einen der Werte (49) hat. Dementsprechend wollen wir mit $\mathcal{G}_3^{\mathrm{c}}$ die Gruppen bezeichnen, welche diesem Typus angehören. Wegen $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$ ist der Wert $\mathrm{c} = 1$ auszuschließen. Wir zeigen, *daß zwei* $\mathcal{G}_3^{\mathrm{c}}$ *und* $\mathcal{G}_3^{\bar{\mathrm{c}}}$ *nur dann ähnlich sind, wenn* $\mathrm{c} = \bar{\mathrm{c}}$. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß eine $\mathcal{G}_3^{\mathrm{c}}$ genau zwei inv.e inf. Trf.n

[16]) Vgl. a. a. O. [14]), Abschn. 2, Kap. 18, § 79, S. 312/3.

enthält; bei den Gruppen (42c) sind dies für jeden Wert von c die inf. Trf.n p und q. In den Fällen $c \neq \infty$ erzeugen sie die *zwei*gliedrige Derivierte der $\mathcal{G}_3^c (c \neq \infty)$. Die Derivierte einer $\mathcal{G}_3^\infty$ hingegen ist *ein*gliedrig und wird demnach von der einen inv.n inf. Trf. erzeugt; die andere ist die *kommutable* inf. B.T. der $\mathcal{G}_3^\infty$ (s. § 4, Anfang). Soll nun die B.T. (14) die beiden $\mathcal{G}_3^c, \mathcal{G}_3^{\bar{c}}$ mit den ch. Fu.n

$$(50) \qquad y', 1, a x y' - b y; \quad \mathfrak{y}', 1, \bar{a}\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \bar{b}\mathfrak{y}$$

ineinander überführen, dann müssen die beiden inv.n inf. Trf.n $y', 1$ in dieser Reihenfolge entweder in $\mathfrak{y}', 1$ oder in $1, \mathfrak{y}'$ übergehen. Mittels der Beziehung

$$(51) \qquad \mathfrak{M}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}') = \Delta M(x, y, y')^{17}),$$

welche zwischen den ch. Fu.n zweier durch die B.T. (14) auseinander hervorgehenden inf. B.T.n stattfindet, ergibt sich unter Berücksichtigung von (15) und (16), daß dementsprechend entweder $a : b = \bar{a} : \bar{b}$ oder $a : b = \bar{b} : \bar{a}$ sein muß. Damit ist der Nachweis $c = \bar{c}$ für ähnliche Gruppen $\mathcal{G}_3^c, \mathcal{G}_3^{\bar{c}}$ erbracht.

Die Gruppen (42 d) und (42 e) gehören zu den Typen $\mathcal{G}_3^{\frac{5}{4}}$ und $\mathcal{G}_3^\infty$; denn bei Ausübung der Trf.n

$$(52) \qquad \text{(a)}\ \mathfrak{x} = x, \mathfrak{y} = y - \tfrac{1}{2}x^2 \quad \text{(b)}\ \mathfrak{x} = \log x, \mathfrak{y} = y$$

verwandeln sich (42 d) und (42 e) in $\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, \mathfrak{x}\mathfrak{p} + 2\mathfrak{y}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{y}\mathfrak{q}$, d. h. in die Gruppen (42 c) mit $a : b = 1 : 2$ und $a : b = 0 : 1$.

Schließlich können wir uns leicht überzeugen, daß die Gruppen (42 f, g) weder untereinander ähnlich sind noch einem der Typen $\widetilde{\mathcal{G}}_3, \mathcal{G}_3^c$ angehören. Wir bezeichnen die mit (42 g) bzw. (42 f) ähnlichen B.T.s-Gruppen mit $\overline{\mathcal{G}}_3$ bzw. $\widehat{\mathcal{G}}_3$. Anhand der Gruppen (42 g, f) erkennen wir sofort, daß im Unterschied zu den $\mathcal{G}_3^c$ die Gruppen $\overline{\mathcal{G}}_3$ und $\widehat{\mathcal{G}}_3$ nur je *eine* inv.e inf. Trf. enthalten. Die Derivierte einer $\widehat{\mathcal{G}}_3$ ist *zwei-*, die einer $\overline{\mathcal{G}}_3$ *ein*gliedrig.

Die Kategorie der Gruppen G_3 wird somit gebildet durch die drei Typen $\widetilde{\mathcal{G}}_3, \overline{\mathcal{G}}_3, \widehat{\mathcal{G}}_3$ und die ∞^1 Typen $\mathcal{G}_3^c$.

§ 4. Die Definitionsgleichungen der projektiven G_3^2.

Zu jeder G_3^2 gibt es eine inf. B.T., welche mit allen inf. Trf.n der G_3^2 vertauschbar ist; wir wollen sie die kommutable inf. Trf. der G_3^2 nennen. Die kommutablen inf. Trf.n der Gruppen (42 b, g, c, f) sind in dieser Reihenfolge: $xp + yq, q$ und die inf. B.T.n mit den ch. Fu.n $y'^{\frac{b}{b-a}}, e^{y'}$. Ist die G_3^2 durch ihre Defgl.n (32) gegeben und soll die inf. B.T. Q mit allen inf. B.T.n M der G_3^2 vertauschbar, d. h. $\{QM\} = 0$ sein vermöge (32), dann bestehen die Beziehungen

$$(53) \qquad \begin{gathered} \binom{12}{1} - \binom{21}{1} = (\log Q)_2 = -\varphi_2, \\ \binom{12}{2} - \binom{21}{2} = -(\log Q)_1 = \varphi_1, \ \binom{12}{0} - \binom{21}{0} = (\log Q)_3 = -\varphi_3, \end{gathered}$$

wobei φ bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Die Int. Bed.n zu (53) sind notwendigerweise eine Folge der Relationen zwischen den $\binom{ij}{k}$. Es wird also

$$(54) \qquad \boxed{\text{(a)}\ Q = e^{-\varphi} \quad \text{(b)}\ M_3 = -\varphi_0 M_1 + \varphi_1 M_2 - \varphi_3 M.}$$

---

[17]) A. a. O. [14]), Abschn. 2, Kap. 15, § 69, Theorem 45.

Die Beziehungen (53) in Verbindung mit (41) gestatten den Nachweis, daß alle *proj.n* G_3^2 durch Gleichungen der Form

$$(55) \qquad \text{(a)} \begin{matrix} M_{11} = 0, \\ M_{22} = 0 \end{matrix} \qquad \text{(b)} \begin{matrix} M_{12} = -\sigma_2 M_1 + \sigma_1 M_2 - \sigma_3 M, \\ M_{21} = \tau_2 M_1 - \tau_1 M_2 + \tau_3 M \end{matrix}$$

definiert werden. Die Gleichungen (55 a) definieren nämlich die proj.e $\mathcal{G}_8$ selber, so daß wir für proj.e Gruppen (32) einfach $\binom{ii}{k} = 0$ $(i = 1, 2; k = 1, 2, 0)$ zu setzen haben. (41) liefert bei dieser Vereinfachung

$$(56) \qquad \begin{gathered} \binom{12}{1} + \binom{21}{1} = (\log \varepsilon)_2 = \bar{\varphi}_2, \\ \binom{12}{2} + \binom{21}{2} = -(\log \varepsilon)_1 = -\bar{\varphi}_1, \quad \binom{12}{0} + \binom{21}{0} = (\log \varepsilon)_3 = \bar{\varphi}_3, \end{gathered}$$

wo $\bar{\varphi}$ wieder bis auf eine additive Konstante bestimmt sein muß. (53) und (56) zusammen führen auf die Diffgl.n (55 b), wenn

$$(57) \qquad \text{(a)} \ \varphi = \sigma + \tau \quad \text{(b)} \ \bar{\varphi} = \tau - \sigma$$

gesetzt wird. Aus (56) folgt dann

$$(58) \qquad \varepsilon = a e^{\tau - \sigma} = a e^{\bar{\varphi}},$$

wo a eine willkürliche Konstante; durch (58) werden alle inv.n Diffgl.n 2. O. $y'' + \varepsilon = 0$ der Gruppe (55) geliefert.

Umgekehrt wird die größte proj.e Gruppe der ∞^1 Diffgl.n (58) definiert durch (55 a) und

$$(58') \qquad M_{12} + M_{21} = \bar{\varphi}_2 M_1 - \bar{\varphi}_1 M_2 + \bar{\varphi}_3 M.$$

Ferner erzeugen die inf. Trf.n, welche mit der inf. Trf. (54 a) vertauschbar sind, wegen der Jacobischen Identität eine durch (54 b) definierte unendliche Gruppe. *Mithin definiert das System* (55 a), (54 b), (58′) *oder, w. d. i., das System* (55) *die größte (proj.e) Gruppe, welche die* ∞^1 *Diffgl.n* (58) *inv. läßt, und deren inf. Trf.n mit der inf. Trf.* (54 a) *vertauschbar sind.*

Bezüglich der Größen σ, τ wollen wir jetzt die dafür notwendigen und hinreichenden Relationen herleiten, daß das System (55) eine *drei*gliedrige Gruppe definiert (welche dann eine G_3^2 sein muß). Auf Grund der vorangehenden Bemerkung müssen diese Relationen gleichbedeutend mit den Int. Bed.n sein, zu deren Berechnung wir die ∂-Relationen 3. und 4. Stufe heranziehen müssen; die Identitäten (4) lauten für $f = M$ wegen (55 a):

$$(59) \qquad M_{211} = 2M_{121}, \ M_{122} = 2M_{212}.$$

Von den ∂-Relationen 4. Stufe sind sieben unabhängig [18]); außer den vier Identitäten, welche durch Ausübung der Op.n ∂_1, ∂_2 auf die Identitäten (4) hervorgehen, sind dies die drei folgenden

$$(60) \qquad f_{1112} + f_{1211} = 2f_{1121}, \quad f_{2221} + f_{2122} = 2f_{2212}, \quad f_{1221} = f_{2112}.$$

Für $f = M$ wird (60):

$$(61) \qquad M_{1211} = 0, \quad M_{2122} = 0, \quad M_{1221} = M_{2112}.$$

Aus (59) resultieren die Int. Bed.n

$$(62) \qquad \begin{matrix} \text{(a)} & \chi_1 = \tau_1 \chi, & \chi_2 = \tau_2 \chi & (\chi_3 = \tau_3 \chi) \\ \text{(a*)} & \psi_2 = \sigma_2 \psi, & \psi_1 = \sigma_1 \psi & (\psi_3 = \sigma_3 \psi) \end{matrix},$$

$$(63) \qquad \chi = 2\sigma_1 + \tau_1, \quad \psi = 2\tau_2 + \sigma_2.$$

[18]) A. a. O. [2]), § 1.

Wir brauchen nur etwa (62 a) zu errechnen, (62 a*) können wir dann mittels der das System (55) reproduzierenden Substitution

$$(64) \qquad (\partial_1\partial_2)\,(\sigma\tau)$$

— welche formal dieselbe Wirkung hervorbringt wie die Dualität (17) — ohne weiteres hinschreiben. Die dritte, in Klammern gesetzte Gleichung (62 a) bzw. (62 a*) ist eine Folge der beiden ersten Gleichungen (62 a) bzw. (62 a*).

Die Identität (61_1) [19]) liefert die weiteren Bedingungen

$$(65) \quad \begin{gathered} \sigma_{111} - 2\tau_1\sigma_{11} - \sigma_1\tau_{11} + \sigma_1\tau_1^2 = 0, \quad \sigma_{112} - 2\tau_2\sigma_{11} - \sigma_1\tau_{12} + \sigma_1\tau_1\tau_2 = 0\,, \\ \sigma_{113} - \sigma_1\tau_{13} + \tau_3(-2\sigma_{11} + \sigma_1\tau_1) = 0\,, \end{gathered}$$

aus denen wir mittels der Substitution (64) die von der Identität (61_2) gelieferten Relationen gewinnen:

$$(65^*) \quad \begin{gathered} \tau_{222} - 2\sigma_2\tau_{22} - \tau_2\sigma_{22} + \tau_2\sigma_2^2 = 0, \quad \tau_{221} - 2\sigma_1\tau_{22} - \tau_2\sigma_{21} + \sigma_1\sigma_2\tau_2 = 0\,, \\ \tau_{223} - \tau_2\sigma_{23} + \sigma_3(-2\tau_{22} + \sigma_2\tau_2) = 0\,. \end{gathered}$$

Die Identität (61_3) endlich — von der man nur etwa die linke Seite auszurechnen braucht, weil sich die rechte von ihr durch die Substitution (64) unterscheidet — führt zu den Beziehungen

$$(66) \quad \begin{gathered} \sigma_{212} + \tau_{122} - (\sigma_2 + \tau_2)\,(\sigma_{21} + \tau_{12}) - \sigma_2\sigma_{12} - \tau_1\tau_{22} + \sigma_2\tau_2(\sigma_1 + \tau_1) = 0\,, \\ \tau_{121} + \sigma_{211} - (\sigma_1 + \tau_1)\,(\sigma_{21} + \tau_{12}) - \tau_1\tau_{21} - \sigma_2\sigma_{11} + \sigma_1\tau_1(\sigma_2 + \tau_2) = 0\,, \\ (\sigma_{21} + \tau_{12})_3 - \sigma_2\sigma_{13} - \tau_1\tau_{23} - (\sigma_3 + \tau_3)\,(\sigma_{21} + \tau_{12}) + \sigma_1\sigma_2\tau_3 + \tau_1\tau_2\sigma_3 = 0\,. \end{gathered}$$

Die Relationen (65) bis (66) können wesentlich vereinfacht werden, wenn wir die weiteren Abkürzungen

$$(67) \quad \begin{gathered} \mathsf{A} = \varphi_{11} - \varphi_1^2, \quad \mathsf{B} = \varphi_{22} - \varphi_2^2 \quad (\varphi \text{ s. (57 a)}), \\ \Gamma = \sigma_{21} + \tau_{12} - \sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\tau_2 - \tau_1\tau_2 \end{gathered}$$

einführen. Wegen (62) wird nun

$$(67') \quad \begin{gathered} \mathsf{A} = -(\sigma_{11} + \sigma_1^2), \quad \mathsf{B} = -(\tau_{22} + \tau_2^2)\,, \\ \Gamma = -2\sigma_{12} + \sigma_{21} - \sigma_1\sigma_2 = -2\tau_{21} + \tau_{12} - \tau_1\tau_2 \end{gathered}$$

$$(67'') \qquad \mathsf{A}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\tau_{11} - \frac{1}{2}\,\tau_1^2\right), \quad \mathsf{B}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{22} - \frac{1}{2}\,\sigma_2^2\right),$$

wenn definiert wird

$$(68) \qquad \boxed{\mathsf{A}(a) = \mathsf{A} + a\chi^2, \quad \mathsf{B}(a) = \mathsf{B} + a\psi^2, \quad \Gamma(a) = \Gamma + a\chi\psi\,,}$$

unter a eine beliebige Konstante verstanden. Die Relationen ($65_{1,2}$) und ($65^*_{1,2}$) können jetzt wegen (62) die Form erhalten

$$(69) \quad \begin{gathered} \text{(a)} \quad \mathsf{A}_1 - 2\tau_1\mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{A}_2 - 2\tau_2\mathsf{A} = 0 \quad (\mathsf{A}_3 - 2\tau_3\mathsf{A} = 0) \\ \text{(a*)} \quad \mathsf{B}_2 - 2\sigma_2\mathsf{B} = 0, \quad \mathsf{B}_1 - 2\sigma_1\mathsf{B} = 0 \quad (\mathsf{B}_3 - 2\sigma_3\mathsf{B} = 0) \end{gathered}$$

Unter der Voraussetzung von (62) bestehen ferner die Identitäten

$$(69') \qquad \mathsf{A}_2 + \sigma_2\mathsf{A} = \Gamma_1 + \sigma_1\Gamma, \quad \mathsf{B}_1 + \tau_1\mathsf{B} = \Gamma_2 + \tau_2\Gamma\,.$$

Die beiden — sich nur durch die Substitutionen (64) unterscheidenden — Relationen ($66_{1,2}$) werden dann zu

$$(70) \qquad \boxed{\psi\Gamma - \chi\mathsf{B} = 0, \quad \chi\Gamma - \psi\mathsf{A} = 0\,.}$$

Wegen (70) können die Identitäten (69') auch so geschrieben werden

$$(71) \qquad \mathsf{A}_2 - 2\tau_2\mathsf{A} = \Gamma_1 - \varphi_1\Gamma, \quad \mathsf{B}_1 - 2\sigma_1\mathsf{B} = \Gamma_2 - \varphi_2\Gamma,$$

---

[19]) Unter (61_1) verstehen wir die erste der Identitäten (61). Auf diese Weise werden wir auch in der Folge die einzelnen Gleichungen eines mit einer Gesamtnummer bezeichneten Gleichungssystems hervorheben.

so daß nach (69) die Diffgl.n erfüllt sind

$$(72)\qquad \Gamma_1 - \varphi_1\Gamma = 0, \quad \Gamma_2 - \varphi_2\Gamma = 0 \quad (\Gamma_3 - \varphi_3\Gamma = 0)\,.$$

Eine einfache Rechnung zeigt schließlich, daß die Gleichungen (65_3), (65^*_3), (66_3) eine Folge von (62) und (69) bis (72) werden. *Die Int. Bed.n zu* (55) *finden sich also durch* (62), (70), (69) *repräsentiert.*

Die Diffgl.n (62), (69), (72) lassen sich *ein*mal integrieren:

$$(73)\qquad e^{-\tau}\chi = \chi_{0)},\ e^{-\sigma}\psi = \psi_{0)};\ e^{-2\tau}\mathsf{A} = \mathsf{A}_{0)},\ e^{-2\sigma}\mathsf{B} = \mathsf{B}_{0)};\ e^{-\varphi}\Gamma = \Gamma_{0)},$$

unter $\chi_{0)}$, $\psi_{0)}$, $\mathsf{A}_{0)}$, $\mathsf{B}_{0)}$, $\Gamma_{0)}$ Konstanten verstanden. Die Gleichung (73_5) ist dabei eine Folge von (73_{1-4}) und (70). Auf Grund der Gleichungen (70) finden zwischen den Konstanten in (73) die Beziehungen statt:

$$(74)\qquad \boxed{\psi_{0)}\Gamma_{0)} - \chi_{0)}\mathsf{B}_{0)} = 0,\ \chi_{0)}\Gamma_{0)} - \psi_{0)}\mathsf{A}_{0)} = 0.}$$

Definieren wir analog zu (68)

$$(75)\qquad \boxed{\mathsf{A}_{0)}(a) = \mathsf{A}_{0)} + a\chi_{0)}^2,\ \mathsf{B}_{0)}(a) = \mathsf{B}_{0)} + a\psi_{0)}^2,\ \Gamma_{0)}(a) = \Gamma_{0)} + a\chi_{0)}\psi_{0)},}$$

dann folgt aus (73)

$$(76)\qquad e^{-2\tau}\mathsf{A}(a) = \mathsf{A}_{0)}(a),\ e^{-2\sigma}\mathsf{B}(a) = \mathsf{B}_{0)}(a),\ e^{-\varphi}\Gamma(a) = \Gamma_{0)}(a).$$

Drücken wir in (62) die zweistufigen Op.n von τ durch τ_1, τ_2 und die Op.n 1. und 2. Stufe von σ aus, dann lassen sich mit Hilfe der ∂-Relationen (4) für $f = \sigma$ und $f = \tau$ und der Beziehungen (70), (69) sämtliche Op.n 3. Stufe von σ durch die Op.n niedrigerer Stufe von σ, τ darstellen:

$$(77)\qquad \begin{gathered} \sigma_{111} = -2(\sigma_1\sigma_{11} + \tau_1\mathsf{A}),\ \sigma_{112} = -2(\sigma_1\sigma_{12} + \tau_2\mathsf{A}),\\ \sigma_{222} = \sigma_2(\sigma_{22} + 4\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})),\ \sigma_{221} = \sigma_2\sigma_{21} + 4\sigma_1\mathsf{B}(\tfrac{1}{4}),\\ \sigma_{211} = -\tfrac{1}{3}\psi\mathsf{A},\ \sigma_{122} = -\tfrac{1}{3}\chi\mathsf{B}. \end{gathered}$$

Die Identitäten ($60_{1,2}$) ziehen für $f = \sigma$ die Relationen nach sich

$$(78)\qquad \boxed{\mathsf{A}\Gamma(\tfrac{2}{9}) = 0,\ \mathsf{B}\Gamma(\tfrac{2}{9}) = 0.}$$

Man gewinnt natürlich aus (77) durch die Substitution (64) die entsprechenden Relationen für τ; es folgt daraus, daß

$$(79)\qquad \sigma_{211} = \tau_{211},\ \sigma_{122} = \tau_{122}.$$

Die Systeme (78) und (79) ändern sich bei der Substitution (64) nicht.

Die Determinante (40) läßt sich nach einer elementaren Umformung so darstellen

$$(80)\qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \Gamma & -\mathsf{A} \\ \tau_2 & \mathsf{B} & -\Gamma \end{vmatrix} = \mathsf{AB} - \Gamma^2.$$

Abschließend können wir den Satz aussprechen:

Satz. 3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß durch das System* (55) *eine* G_3^2 *definiert werde, ist das Bestehen der Relationen* (62), (70), (69), *aus denen u. a. die Beziehungen* (78) *folgen. Ferner sind die Identitäten* (71) *eine Folge von* (62) *und* (70).

§ 5. Die für alle Untergruppen G_3^2 einer $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ gültigen Definitionsgleichungen und deren Koeffizientenrelationen.

1. Die in dem vorangegangenen Paragraphen entwickelten Formeln verallgemeinern wir, indem wir sie der allgemeinsten B.T. (14) unterwerfen. Zu dem Zweck schreiben wir das System (55) in einer den Variablen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ entsprechenden Form:

$$(81)\qquad (a)\ \begin{matrix}\mathfrak{M}_{\mathrm{I\,I}} = 0,\\ \mathfrak{M}_{\mathrm{II\,II}} = 0\end{matrix} \qquad (b)\ \begin{matrix}\mathfrak{M}_{\mathrm{I\,II}} = -\mathfrak{s}_{\mathrm{II}}\mathfrak{M}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{s}_{\mathrm{I}}\mathfrak{M}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{s}_{\mathrm{III}}\mathfrak{M},\\ \mathfrak{M}_{\mathrm{III\,I}} = \mathfrak{t}_{\mathrm{II}}\mathfrak{M}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{t}_{\mathrm{I}}\mathfrak{M}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{t}_{\mathrm{III}}\mathfrak{M}.\end{matrix}$$

Die Größen (57 a), (63), (67) schreiben wir folgendermaßen:

$$(82)\quad \begin{array}{l} \widehat{\varphi} = \mathfrak{s} + \mathfrak{t};\ \widehat{\chi} = 2\mathfrak{s}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{t}_{\mathrm{I}},\ \widehat{\psi} = 2\mathfrak{t}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{s}_{\mathrm{II}}; \\ \mathfrak{A} = \widehat{\varphi}_{\mathrm{II}} - \widehat{\varphi}_{\mathrm{I}}^2,\ \mathfrak{B} = \widehat{\varphi}_{\mathrm{II\,II}} - \widehat{\varphi}_{\mathrm{II}}^2,\ \mathfrak{C} = \mathfrak{s}_{\mathrm{II\,I}} + \mathfrak{t}_{\mathrm{I\,II}} - \mathfrak{s}_{\mathrm{I}}\mathfrak{s}_{\mathrm{II}} - 2\mathfrak{s}_{\mathrm{I}}\mathfrak{t}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{t}_{\mathrm{I}}\mathfrak{t}_{\mathrm{II}}. \end{array}$$

An die Stelle der Substitution (64) tritt die Substitution $(\partial_{\mathrm{I}}\partial_{\mathrm{II}})(\mathfrak{s}\mathfrak{t})$, welche u. a. $\widehat{\varphi}$ und $\mathfrak{C}$ ungeändert läßt und $\widehat{\chi}$, $\widehat{\psi}$ sowie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ vertauscht. Es erübrigt sich, die Relationen (62), (69), (70) in ihrer auf das System (81) bezüglichen Gestalt wiederzugeben; lediglich die Gleichungen (73), (54 a) und (58) wollen wir noch umschreiben:

$$(83)\quad e^{-\mathfrak{t}}\widehat{\chi} = \widehat{\chi}_{0)},\ e^{-\mathfrak{s}}\widehat{\psi} = \widehat{\psi}_{0)},\ e^{-2\mathfrak{t}}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{0)},\ e^{-2\mathfrak{s}}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{0)},\ e^{-\hat{\varphi}}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{0)}.$$

$$(84)\qquad (\mathrm{a})\quad \mathfrak{Q} = e^{-\hat{\varphi}} \qquad (\mathrm{b})\quad \mathfrak{e} = ae^{\mathfrak{t}-\mathfrak{s}}.$$

Setzen wir nun den Ausdruck (51) in die Gleichungen (81) ein, so erhalten wir — auf Grund von (26), (29), (25), (28) und (11) — der Reihe nach die Diffgl.n:

$$(85)\quad \boxed{\begin{array}{ll} (\mathrm{a}) & M_{\alpha\alpha} + \alpha_2 M_\alpha + \alpha_3 M = 0,\quad M_{\beta\beta} + \beta_2 M_\beta + \beta_3 M = 0 \\ (\mathrm{b}) & \begin{array}{l} M_{\alpha\beta} = -\sigma_\beta M_\alpha + (\sigma_\alpha - \alpha_2)\, M_\beta + (\omega\sigma_3 - \alpha_3)\, M\,, \\ M_{\beta\alpha} = (\tau_\beta - \beta_2)\, M_\alpha - \tau_\alpha M_\beta - (\omega\tau_3 + \beta_3)\, M\,, \end{array} \end{array}}$$

worin σ, τ folgendermaßen von $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ abhängen:

$$(85')\quad \sigma = \mathfrak{s} + \log(-\bar{\omega}P_\beta) = \mathfrak{s} + \log P_2, \qquad \tau = \mathfrak{t} + \log(\bar{\omega}X_\alpha) = \mathfrak{t} + \log X_2\,.$$

(85 a) definiert die $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$. In den Gleichungspaaren (85 a, b), (85′) unterscheiden sich, wie leicht zu begründen, die einzelnen Gleichungen durch die Substitution

$$(86)\qquad S = (\alpha\beta)\,(\sigma\tau)\,(\partial_{\mathrm{I}}\partial_{\mathrm{II}})\,(\mathfrak{s}\mathfrak{t})\,(XP)\,.$$

Bezeichnen wir jetzt mit φ, χ, ψ, A, B, Γ die Größen

$$(87)\quad \boxed{\begin{array}{l} \varphi = \sigma + \tau + \log\omega;\quad \chi = 2\sigma_\alpha + \tau_\alpha + \bar{\omega}\omega_\alpha - \alpha_2,\quad \psi = 2\tau_\beta + \sigma_\beta + \bar{\omega}\omega_\beta - \beta_2; \\ \mathsf{A} = \varphi_{\alpha\alpha} - \varphi_\alpha^2 + \alpha_2\varphi_\alpha - \alpha_3,\quad \mathsf{B} = \varphi_{\beta\beta} - \varphi_\beta^2 + \beta_2\varphi_\beta - \beta_3\,, \\ \Gamma = \sigma_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\beta} - \sigma_\alpha\sigma_\beta - 2\sigma_\alpha\tau_\beta - \tau_\alpha\tau_\beta + (\beta_2 - \bar{\omega}\omega_\beta)\,\sigma_\alpha - \\ \quad - \bar{\omega}\omega_\alpha\sigma_\beta - \bar{\omega}\omega_\beta\tau_\alpha + (\alpha_2 - \bar{\omega}\omega_\alpha)\tau_\beta + \bar{\omega}(\beta_{\alpha\beta} - \alpha_{\beta\alpha}) - 2\bar{\omega}^2\omega_\alpha\omega_\beta - \alpha_2\beta_2\,, \end{array}}$$

dann finden wir auf Grund von (85′), (26), (29), (28) die Trf.s-Formeln

$$(88)\qquad \begin{array}{l} \varphi = \widehat{\varphi} + \log\Delta;\qquad \chi = X_\alpha\widehat{\chi},\ \psi = P_\beta\widehat{\psi}; \\ \mathsf{A} = X_\alpha^2\mathfrak{A},\qquad \mathsf{B} = P_\beta^2\mathfrak{B},\qquad \Gamma = X_\alpha P_\beta\mathfrak{C}\,. \end{array}$$

Zwischen den in (87) und (88) auftretenden Größen finden die Beziehungen

$$(88')\quad S\varphi = \varphi + \log(-1);\quad S\chi = \psi, S\psi = \chi;\quad S\mathsf{A} = \mathsf{B}, S\mathsf{B} = \mathsf{A}, S\Gamma = \Gamma$$

statt. Aus (88) folgt ferner

$$(89)\qquad \mathsf{A}(a) = X_\alpha^2\mathfrak{A}(a),\qquad \mathsf{B}(a) = P_\beta^2\mathfrak{B}(a),\qquad \Gamma(a) = X_\alpha P_\beta\mathfrak{C}(a)\,.$$

Endlich gelangen wir von (85′), (88) aus vermöge (26) zu den Trf.s-Formeln

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{a}) & \chi_\alpha - (\tau + \log\omega)_\alpha\chi = X_\alpha^2(\widehat{\chi}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{t}_{\mathrm{I}}\widehat{\chi}),\quad \chi_\beta - (\tau + \log\omega)_\beta\chi = X_\alpha P_\beta(\widehat{\chi}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{t}_{\mathrm{II}}\widehat{\chi}) \\ (\mathrm{a}^*) & \psi_\beta - (\sigma + \log\omega)_\beta\psi = P_\beta^2(\widehat{\psi}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{s}_{\mathrm{II}}\widehat{\psi}),\quad \psi_\alpha - (\sigma + \log\omega)_\alpha\psi = X_\alpha P_\beta(\widehat{\psi}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{s}_{\mathrm{I}}\widehat{\psi}) \\ (90)\ (\mathrm{b}) & \mathsf{A}_\alpha - 2(\tau + \log\omega)_\alpha\mathsf{A} = X_\alpha^3(\mathfrak{A}_{\mathrm{I}} - 2\mathfrak{t}_{\mathrm{I}}\mathfrak{A}),\quad \mathsf{A}_\beta - 2(\tau + \log\omega)_\beta\mathsf{A} = X_\alpha^2 P_\beta(\mathfrak{A}_{\mathrm{II}} - 2\mathfrak{t}_{\mathrm{II}}\mathfrak{A}) \\ (\mathrm{b}^*) & \mathsf{B}_\beta - 2(\sigma + \log\omega)_\beta\mathsf{B} = P_\beta^3(\mathfrak{B}_{\mathrm{II}} - 2\mathfrak{s}_{\mathrm{II}}\mathfrak{B}),\quad \mathsf{B}_\alpha - 2(\sigma + \log\omega)_\alpha\mathsf{B} = X_\alpha P_\beta^2(\mathfrak{B}_{\mathrm{I}} - 2\mathfrak{s}_{\mathrm{I}}\mathfrak{B}) \\ (\mathrm{c}) & \Gamma_\alpha - (\varphi + \log\omega)_\alpha\Gamma = X_\alpha^2 P_\beta(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}} - \widehat{\varphi}_{\mathrm{I}}\mathfrak{C})\quad (\mathrm{c}^*)\ \Gamma_\beta - (\varphi + \log\omega)_\beta\Gamma = X_\alpha P_\beta^2(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}} - \widehat{\varphi}_{\mathrm{II}}\mathfrak{C}). \end{array}$$

(90a, b, c) und (90 a*, b*, c*) gehen mittels der Substitution S ineinander über.

Denken wir uns die Relationen (62), (69), (71), (72) in der auf das System (81) bezüglichen Form geschrieben, so verwandeln sie sich nach (90) in die folgenden:

$$(91)\quad \boxed{\begin{array}{ll} (\mathrm{a}) & \chi_\alpha - (\tau + \log\omega)_\alpha\chi = 0,\qquad \chi_\beta - (\tau + \log\omega)_\beta\chi = 0 \\ (\mathrm{a}^*) & \psi_\beta - (\sigma + \log\omega)_\beta\psi = 0,\qquad \psi_\alpha - (\sigma + \log\omega)_\alpha\psi = 0. \end{array}}$$

$$(92)\qquad \boxed{\begin{array}{l}(\mathrm{a})\quad \mathsf{A}_\alpha - 2(\tau+\log\omega)_\alpha \mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{A}_\beta - 2(\tau+\log\omega)_\beta \mathsf{A} = 0\\ (\mathrm{a}^*)\quad \mathsf{B}_\beta - 2(\sigma+\log\omega)_\beta \mathsf{B} = 0, \quad \mathsf{B}_\alpha - 2(\sigma+\log\omega)_\alpha \mathsf{B} = 0\end{array}}$$

$$(93)\qquad \boxed{\mathsf{A}_\beta - 2(\tau+\log\omega)_\beta \mathsf{A} \equiv \Gamma_\alpha - (\varphi+\log\omega)_\alpha \Gamma,\ \mathsf{B}_\alpha - 2(\sigma+\log\omega)_\alpha \mathsf{B} \equiv \Gamma_\beta - (\varphi+\log\omega)_\beta \Gamma}$$

$$(94)\qquad \boxed{\Gamma_\alpha - (\varphi+\log\omega)_\alpha \Gamma = 0, \qquad \Gamma_\beta - (\varphi+\log\omega)_\beta \Gamma = 0,}$$

während die Relationen (70) und (78) unverändert für die Größen (87) gültig bleiben. Die Identitäten (93) sind jetzt natürlich eine Folge von (91) und (70), während (94) aus (92) und (93) folgt. Die Gleichungen (83) endlich werden zu

$$(95)\qquad \boxed{\begin{array}{l}\bar\omega\, e^{-\tau}\chi = \chi_{0)}, \quad \bar\omega\, e^{-\sigma}\psi = -\psi_{0)};\\ \bar\omega^2 e^{-2\tau}\mathsf{A} = \mathsf{A}_{0)}, \quad \bar\omega^2 e^{-2\sigma}\mathsf{B} = \mathsf{B}_{0)}, \quad \bar\omega^2 e^{-(\sigma+\tau)}\Gamma = -\Gamma_{0)},\end{array}}$$

wobei die Konstanten $\chi_{0)}, \ldots, \Gamma_{0)}$ dieselben sind wie die entsprechenden in (83):

$$(95')\qquad \chi_{0)} = \widehat{\chi}_{0)},\ \psi_{0)} = \widehat{\psi}_{0)}; \quad \mathsf{A}_{0)} = \mathfrak{A}_{0)},\ \mathsf{B}_{0)} = \mathfrak{B}_{0)},\ \Gamma_{0)} = \mathfrak{C}_{0)},$$

sofern die noch unbestimmten Konstanten in σ, τ und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ gemäß der Verknüpfung durch (85′) gewählt werden. Daß (95) die ersten Integrale der Diffgl.n (91), (92), (94) darstellt, liegt auf der Hand. (95_5) ist eine Folge von (95_{1-4}) und (70). Die Gleichungen (74) gelten jetzt auch für die Konstanten in (95). Endlich liefert (95) analog zu (76):

$$(96)\qquad \boxed{\bar\omega^2 e^{-2\tau}\mathsf{A}(a) = \mathsf{A}_{0)}(a), \quad \bar\omega^2 e^{-2\sigma}\mathsf{B}(a) = \mathsf{B}_{0)}(a), \quad \bar\omega^2 e^{-(\sigma+\tau)}\Gamma(a) = -\Gamma_{0)}(a).}$$

Ist nun umgekehrt ein System (85) vorgelegt, bei welchem α, β die Relationen (24) erfüllen, dann läßt sich eine B.T. (14) angeben, welche die Diffgl.n $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ in $y'' = 0$, $y'' = \infty$ überführt und somit das System (85) in (81); bestehen also die Beziehungen (70), (91), (92) bezüglich des Systems (85), dann finden auch die Relationen (70), (62), (69) statt, letztere in der auf das System (81) bezüglichen Form geschrieben. Folglich definiert dann nach Satz 3 das System (81) eine G_3^2, also auch das System (85). Somit haben wir das Theorem:

Theorem 1. *Die Kategorie der eigentlichen B.T.s-Gruppen G_3^2 ist dadurch charakterisiert, daß deren Defgl.n in der Form* (85) *geschrieben werden können, wo die Größen α, β, σ, τ den Beziehungen* (24), (70), (91), (92) *genügen, unter χ, ψ, A, B, Γ die Größen* (87) *verstanden. Aus den genannten Relationen folgen u. a. die Relationen* (78). *Die Relationen* (70) *und* (91) *ziehen die Identitäten* (93) *nach sich.*

2. Vermöge (91) können die Größen A, B, Γ, $\mathsf{A}(\frac{1}{4})$, $\mathsf{B}(\frac{1}{4})$ folgendermaßen umgeformt werden (vgl. (67′), (67″)):

$$(97)\qquad \boxed{\begin{array}{l}\mathsf{A} = -(\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_\alpha^2) + \alpha_2\sigma_\alpha + \alpha_{2\alpha} - \alpha_3,\ \mathsf{B} = -(\tau_{\beta\beta} + \tau_\beta^2) + \beta_2\tau_\beta + \beta_{2\beta} - \beta_3,\\ \Gamma = \sigma_{\beta\alpha} - 2\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_\alpha\sigma_\beta + \bar\omega\pi\sigma_\alpha - \bar\omega\omega_\alpha\sigma_\beta - \alpha_3 + \alpha_{2\beta}\\ \quad = \tau_{\alpha\beta} - 2\tau_{\beta\alpha} - \tau_\alpha\tau_\beta + \bar\omega\pi\tau_\beta - \bar\omega\omega_\beta\tau_\alpha - \beta_3 + \beta_{2\alpha}.\end{array}}$$

$$(97')\qquad \boxed{\begin{array}{l}\mathsf{A}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}(\tau+\log\omega)_{\alpha\alpha} - \frac{1}{4}(\tau+\log\omega)_\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha_{2\alpha} - \alpha_3 + \frac{1}{4}\alpha_2^2,\\ \mathsf{B}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}(\sigma+\log\omega)_{\beta\beta} - \frac{1}{4}(\sigma+\log\omega)_\beta^2 + \frac{1}{2}\beta_{2\beta} - \beta_3 + \frac{1}{4}\beta_2^2.\end{array}}$$

Die Trf.s-Formeln (88_{4-6}) und ($89_{1,2}$) für $a = \frac{1}{4}$ gelten wegen (90 a, a*) offenbar auch dann, wenn A, B, Γ, $\mathsf{A}(\frac{1}{4})$, $\mathsf{B}(\frac{1}{4})$ von vornherein durch (97), (97′) und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}(\frac{1}{4})$, $\mathfrak{B}(\frac{1}{4})$ durch

$$(98)\qquad \begin{array}{l}\mathfrak{A} = -(\mathfrak{s}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{s}_{\mathrm{I}}^2),\ \mathfrak{B} = -(\mathfrak{t}_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}} + \mathfrak{t}_{\mathrm{II}}^2),\\ \mathfrak{C} = \mathfrak{s}_{\mathrm{III}} - 2\mathfrak{s}_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} - \mathfrak{s}_{\mathrm{I}}\mathfrak{s}_{\mathrm{II}} = \mathfrak{t}_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} - 2\mathfrak{t}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{t}_{\mathrm{I}}\mathfrak{t}_{\mathrm{II}}\end{array}$$

(98′) $$\mathfrak{A}(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{t}_{II} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{t}_I^2),\quad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{s}_{II\,II} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{s}_{II}^2)$$

erklärt werden.

Nach (85′) wird jede der Größen σ, τ für sich transformiert; daher ist aus den bezüglich des Systems (81) geltenden Relationen (77) und der vorhergehenden Bemerkung zu entnehmen, daß auch sämtliche Op.n von σ, τ z. B. durch die Op.n

(99) $$\sigma_\alpha,\ \sigma_\beta,\ \tau_\alpha,\ \tau_\beta;\ \sigma_{\alpha\alpha},\ \sigma_{\alpha\beta},\ \sigma_{\beta\alpha},\ \sigma_{\beta\beta}$$

ausdrückbar sein müssen. Vermöge (91) können zunächst die $\tau_{ij}\,(i, j = \alpha, \beta)$ durch die σ_{ij} sowie χ, ψ ausgedrückt werden. Differentiation von (96_2) für $a = \frac{1}{4}$ liefert nun

(100) $$\boxed{\mathsf{B}_\beta(\tfrac{1}{4}) - 2(\sigma + \log\omega)_\beta \mathsf{B}(\tfrac{1}{4}) = 0,\ \mathsf{B}_\alpha(\tfrac{1}{4}) - 2(\sigma + \log\omega)_\alpha \mathsf{B}(\tfrac{1}{4}) = 0.}$$

Denken wir uns A und $\mathsf{B}(\frac{1}{4})$ durch (97_1) und ($97_2'$) gegeben, dann lassen sich vermöge (92 a) und (100) die Op.n $\sigma_{\alpha\alpha i}$ und $\sigma_{\beta\beta i}$ $(i = \alpha, \beta)$ als Funktionen der Op.n (99) darstellen. Um die Op. $\sigma_{\beta\alpha\alpha}$ als Funktion der Op.n (99) zu erhalten, bilde man die Identität (12_1) für $f = \tau$ und ersetze mittels (91) die Op.n 2. und 3. Stufe von τ durch die Op.n von σ und die Größen χ, ψ. Mit Hilfe der Identität (12_1) für $f = \sigma$ und der Formeln (97) gelangt man dann zu einer Beziehung der Form

(101) $$\begin{aligned}&\sigma_{\beta\alpha\alpha} + (\cdots)\sigma_{\beta\alpha} + (\cdots)\sigma_\beta + \cdots + \chi(*) + \psi(*)\\ &\qquad = -\tfrac{2}{3}\chi\Gamma + \tfrac{1}{3}\psi\mathsf{A} = -\tfrac{1}{3}\psi\mathsf{A},\end{aligned}$$

wo die Punkte Ausdrücke andeuten, welche lediglich von α, β abhängen, während die mit $*$ bezeichneten Koeffizienten noch χ, ψ sowie σ_α, σ_β enthalten. Eine zu (101) analoge Formel ($\overline{101}$) für die Bestimmung von $\sigma_{\alpha\beta\beta}$ — welche wir nicht hinschreiben — erhalten wir mittels der Identität (12_2), angewandt auf $f = \tau$ und $f = \sigma$, unter Berücksichtigung von (91), (97), ($97_2'$), (68_2).

Es liegt auf der Hand, daß die Relationen (92 a), ($100_{1,2}$) in dieser Reihenfolge durch Ausübung der B.T. (14) aus (77_{1-4}) hervorgehen. Aber auch die Relationen (101), ($\overline{101}$) müssen der Reihe nach vermöge der B.T. (14) aus ($77_{5,6}$) entstehen. So überblickt man leicht, daß wegen (88) aus (77_5) oder $\mathfrak{s}_{\Pi\,11} = -\frac{1}{3}\widehat{\psi}\mathfrak{A}$ eine Relation der Form

(102) $$\sigma_{\beta\alpha\alpha} + (\cdots)\sigma_{\beta\alpha} + (\cdots)\sigma_\beta + \cdots = -\tfrac{1}{3}\psi\mathsf{A}$$

entspringen muß, wobei die Punkte rationale Ausdrücke in α, β und ihren Op.n andeuten; denn die Trf.s-Größen X, P müssen ja mittels (21), (28), (29) aus (102) entfernt werden können. Die Relationen (101) und (102) sind indessen mit Notwendigkeit identisch, was, da die linke Seite von (102) die Größen χ, ψ nicht enthält, nur dadurch möglich wird, daß die Koeffizienten $*$ in (101) verschwinden. Man braucht demnach bei der Ausrechnung der linken Seite von (101) die mit χ, ψ behafteten Glieder gar nicht zu berücksichtigen. Das Gleiche gilt für die Relation ($\overline{101}$). Wir gewinnen so die beiden folgenden Relationen zur Bestimmung von $\sigma_{\beta\alpha\alpha}$ und $\sigma_{\alpha\beta\beta}$:

(103) $$\boxed{\Sigma_{1)} = -\tfrac{1}{3}\psi\mathsf{A},\ \ \Sigma_{2)} = -\tfrac{1}{3}\chi\mathsf{B}}$$

(103′) $$\boxed{\begin{aligned}\Sigma_{1)} &= (\bar\sigma_\beta + \tfrac{1}{3}\beta_2)_{\alpha\alpha} + \tfrac{2}{3}(\alpha_{2\alpha\beta} - 2\alpha_{2\beta\alpha}) - \bar\omega(\pi + \omega_\alpha)((\bar\sigma_\beta + \tfrac{1}{3}\beta_2)_\alpha - \tfrac{2}{3}\alpha_{2\beta})\\ &\quad - \bar\omega(\pi_\alpha + \alpha_{\alpha\beta} - \alpha_{\beta\alpha} - \bar\omega\pi(\pi + \omega_\alpha))(\bar\sigma_\beta + \tfrac{1}{3}\beta_2 - \tfrac{2}{3}\alpha_2),\\ \Sigma_{2)} &= (\bar\sigma_\alpha - \tfrac{2}{3}\alpha_2)_{\beta\beta} + \tfrac{1}{3}(2\beta_{2\alpha\beta} - \beta_{2\beta\alpha}) - \bar\omega(\pi + \omega_\beta)((\bar\sigma_\alpha - \tfrac{2}{3}\alpha_2)_\beta + \tfrac{1}{3}\beta_{2\alpha})\\ &\quad - \bar\omega(\pi_\beta + \beta_{\alpha\beta} - \beta_{\beta\alpha} - \bar\omega\pi(\pi + \omega_\beta))(\bar\sigma_\alpha - \tfrac{2}{3}\alpha_2 + \tfrac{1}{3}\beta_2);\\ \bar\sigma &= \sigma + \tfrac{1}{3}\log\omega.\end{aligned}}$$

Mittels der Substitution S bekommt man aus (100) und (103) die entsprechenden Relationen bezüglich τ:

(104) $$\boxed{\mathsf{A}_\alpha(\tfrac{1}{4}) - 2(\tau + \log\omega)_\alpha \mathsf{A}(\tfrac{1}{4}) = 0,\ \mathsf{A}_\beta(\tfrac{1}{4}) - 2(\tau + \log\omega)_\beta \mathsf{A}(\tfrac{1}{4}) = 0}$$

$$(105)\qquad \boxed{\mathsf{T}_{1)} = -\tfrac{1}{3}\chi\mathsf{B},\ \mathsf{T}_{2)} = -\tfrac{1}{3}\psi\mathsf{A}}$$

$$(105')\qquad \boxed{\begin{aligned}
&\mathsf{T}_{1)} = (\bar\tau_\alpha + \tfrac{1}{3}\alpha_2)_{\beta\beta} + \tfrac{2}{3}(\beta_{2\beta\alpha} - 2\beta_{2\alpha\beta}) - \bar\omega(\pi + \omega_\beta)\big((\bar\tau_\alpha + \tfrac{1}{3}\alpha_2)_\beta - \tfrac{2}{3}\beta_{2\alpha}\big)\\
&\quad - \bar\omega\big(\pi_\beta + \beta_{\alpha\beta} - \beta_{\beta\alpha} - \bar\omega\pi(\pi + \omega_\beta)\big)(\bar\tau_\alpha + \tfrac{1}{3}\alpha_2 - \tfrac{2}{3}\beta_2),\\
&\mathsf{T}_{2)} = (\bar\tau_\beta - \tfrac{2}{3}\beta_2)_{\alpha\alpha} + \tfrac{1}{3}(2\alpha_{2\beta\alpha} - \alpha_{2\alpha\beta}) - \bar\omega(\pi + \omega_\alpha)\big((\bar\tau_\beta - \tfrac{2}{3}\beta_2)_\alpha + \tfrac{1}{3}\alpha_{2\beta}\big)\\
&\quad - \bar\omega\big(\pi_\alpha + \alpha_{\alpha\beta} - \alpha_{\beta\alpha} - \bar\omega\pi(\pi + \omega_\alpha)\big)(\bar\tau_\beta - \tfrac{2}{3}\beta_2 + \tfrac{1}{3}\alpha_2);\\
&\bar\tau = \tau + \tfrac{1}{3}\log(-\omega).
\end{aligned}}$$

Aus (103) und (105) ist zu ersehen, daß

$$(106)\qquad \boxed{\mathsf{T}_{2)} = \Sigma_{1)},\ \mathsf{T}_{1)} = \Sigma_{2)}.}$$

Die Größen $\Sigma_{i)}$, $\mathsf{T}_{i)}$ $(i = 1, 2)$ sind weitere Diff. Inv.n des Systems (85) gegenüber beliebigen B.T.n; da nämlich die Relationen (103) der Reihe nach aus $(77_{5,6})$ vermöge der B.T. (14) hervorgehen, müssen die Trf.s-Formeln

$$(107)\quad \Sigma_{1)} = \mathsf{T}_{2)} = X_\alpha^2 P_\beta \mathfrak{s}_{\mathrm{III}} = X_\alpha^2 P_\beta \mathfrak{t}_{\mathrm{III}},\quad \Sigma_{2)} = \mathsf{T}_{1)} = X_\alpha P_\beta^2 \mathfrak{s}_{\mathrm{IIII}} = X_\alpha P_\beta^2 \mathfrak{t}_{\mathrm{IIII}}$$

gelten.

3. Wollen wir das System (85) in die Form (32) bringen, dann liefert eine kleine Rechnung die Defgl.n

$$(108)\qquad \boxed{\begin{aligned}
M_{22} &= \bar\omega[(\tau_2 - \sigma_2)M_1 - (\tau_1 - \sigma_1)M_2 + (\tau_3 - \sigma_3)M],\\
M_{12} &= \bar\omega[(\alpha\tau_2 - \beta\sigma_2)M_1 - (\alpha\tau_1 - \beta\sigma_1)M_2 + (\alpha\tau_3 - \beta\sigma_3)M],\\
M_{21} &= \bar\omega[(\beta\tau_2 - \alpha\sigma_2 + \omega_2)M_1 - (\beta\tau_1 - \alpha\sigma_1 + \omega_1)M_2 + (\beta\tau_3 - \alpha\sigma_3 + \omega_3)M],\\
M_{11} &= \bar\omega[(\alpha\beta(\tau_2 - \sigma_2) + \alpha\beta_2 - \beta\alpha_2)M_1 - (\alpha\beta(\tau_1 - \sigma_1)\\
&\quad + \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)M_2 + (\alpha\beta(\tau_3 - \sigma_3) + \alpha\beta_3 - \beta\alpha_3)M].
\end{aligned}}$$

Aus (108) (oder aus (85) mit Hilfe von (11)) findet man wieder die Formel (54 b) mit dem Wert (87_1) für φ. Dementsprechend gibt (54 a) in Übereinstimmung mit (51), (84 a), (88_1) die ch. Fu. der kommutablen inf. B. T. der G_3^2 (85).

Das geordnete Doppelpaar von Funktionen $(\alpha, \beta; \sigma, \tau)$ wollen wir eine *Basis* der G_3^2 (32) nennen, wenn zwischen diesen vier Größen die Relationen des Theorems 1 stattfinden und die G_3^2 auch durch das System (85) definiert werden kann. Natürlich ist dann $(\beta, \alpha; \tau, \sigma)$ gleichfalls eine Basis der G_3^2. Es ist leicht zu beweisen, *daß zu jedem polaren Paar inv.r Diffgl.n* $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ *oder, w. d. i., zu jeder Obergruppe* $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ *der* G_3^2 (32) *eine einzige Basis* $(\alpha, \beta; \sigma, \tau)$ *gehört.* Denn transformieren wir die betreffende $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ durch eine B.T. (14), (21) in die proj.e $\mathcal{G}_8$, dann wird die transformierte G_3^2 durch ein System (81) definiert. Transformieren wir daher die G_3^2 (81) durch die inverse B.T. (14) wieder rückwärts in die ursprüngliche G_3^2, dann finden wir diese definiert durch das System (85), wo σ, τ durch (85′) bestimmt sind. Also gehört zu jeder Obergruppe $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ der G_3^2 wenigstens *eine* Basis. Es kann aber auch *nur eine* vorhanden sein. Denn bei gegebenen α, β liefert eine Koeffizientenvergleichung von (32) mit (108) die Größen σ_i, τ_i $(i = 1, 2)$ als Ausdrücke in den Größen α, β, $\binom{ij}{k}$ und deren Op.n.

Wir wollen jetzt die Determinante (40) durch die Funktionen $\alpha, \beta, \sigma, \tau$ darstellen. Wegen ihrer gruppentheoretischen Bedeutung (vgl. Satz 2) kann sie sich von der entsprechenden Determinante

$$(109)\qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{AB} - \mathfrak{C}^2 \qquad \text{(vgl. 80)}$$

des Systems (81) nur durch einen nicht verschwindenden Faktor unterscheiden, wenn wir (81) und (85) als vermöge der B.T. (14) zusammenhängend voraussetzen. Wegen (88)

muß daher die Determinante (40) bis auf einen Faktor gleich $\mathsf{AB} - \Gamma^2$ sein. Das bestätigt die Rechnung. Setzen wir analog zu (39)

$$(110) \qquad W_{i_1 \ldots i_s} = \bar{u}^{(0)}_{i_1 \ldots i_s)}(\alpha, \beta) + \bar{u}^{(\beta)}_{i_1 \ldots i_s)}(0, \alpha) + \bar{u}^{(\alpha)}_{i_1 \ldots i_s)}(0, \beta),$$

dann wird mit Rücksicht auf (7), (9), (10)

$$D = \begin{vmatrix} u^{(0)}_{0)} & u^{(2)}_{0)} & u^{(1)}_{0)} \\ u^{(0)}_{1)} & u^{(2)}_{1)} & u^{(1)}_{1)} \\ u^{(0)}_{2)} & u^{(2)}_{2)} & u^{(1)}_{2)} \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} \bar{u}^{(0)}_{0)} & \bar{u}^{(\beta)}_{0)} & \bar{u}^{(\alpha)}_{0)} \\ \bar{u}^{(0)}_{\alpha)} & \bar{u}^{(\beta)}_{\alpha)} & \bar{u}^{(\alpha)}_{\alpha)} \\ \bar{u}^{(0)}_{\beta)} & \bar{u}^{(\beta)}_{\beta)} & \bar{u}^{(\alpha)}_{\beta)} \end{vmatrix} = \omega \bar{D} \quad (\bar{u}^{(0)}_{0)} = \bar{\omega});$$

rechnen wir $\bar{D}$ unter Beachtung von (54b), (10) und (87) mittels einer *elementaren Umformung* aus, so ergibt sich für D:

$$(112) \qquad \boxed{D = \bar{\omega}^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sigma_\alpha - \alpha_2 & -\Gamma & \mathsf{A} \\ \tau_\beta - \beta_2 & -\mathsf{B} & \Gamma \end{vmatrix} = \bar{\omega}^2(\mathsf{AB} - \Gamma^2) = \Delta^2 \mathfrak{D}}$$

(vgl. (88) und (25a)). Aus (112) und Satz 2 folgt, daß bei einer $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ stets $\mathsf{AB} - \Gamma^2 \neq 0$ sein muß. Da ferner die Determinante (112) dann und nur dann den Rang 1 besitzt, wenn $\mathsf{A} = \mathsf{B} = \Gamma = 0$, so muß bei allen $\mathcal{G}^c (c \neq \infty)$ und $\widehat{\mathcal{G}}_3$ wohl $\mathsf{AB} - \Gamma^2 = 0$, aber wenigstens eine der Größen A, B, Γ von Null verschieden ausfallen, während bei den $\mathcal{G}_3^\infty$ und $\overline{\mathcal{G}}_3$ diese drei Größen stets verschwinden müssen.

§ 6. Über eine formale Umgestaltung von Beziehungen, welche sich bei der allgemeinsten Berührungstransformation nicht ändern.

Die in dem vorangehenden § 5 entwickelten allgemeinen Formeln gelten nach Vornahme einer einfachen formalen Modifikation auch dann, wenn wir die Op.n (7′) und nicht die Op.n (7) verwenden. Das ergibt sich aus einem allgemeinen Satze, den wir jetzt ableiten wollen.

$\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots$ sei eine Reihe von Größen, welche mit den Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ verknüpft sind. Werden diese Veränderlichen der allgemeinsten B.T. (14) unterworfen, dann soll das System der Größen $\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots$ in ein anderes System von Größen $f_{1)}, f_{2)}, \ldots$ übergehen, welches mit den Veränderlichen x, y, y' verknüpft ist; es soll dabei jedem $\mathfrak{f}_{i)}$ ein $f_{i)}$ entsprechen, und diesem $f_{i)}$ dann umgekehrt das betreffende $\mathfrak{f}_{i)}$, aber es soll auch Größen $f_{k)}$ geben dürfen, die keinem $\mathfrak{f}_{k)}$ entsprechen. Die $f_{i)}$ sollen von den $\mathfrak{f}_{i)}$ und deren Op.n bezüglich der Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ sowie von den Op.n erster und höherer Stufe der Trf.s-Größen X, P bezüglich der Veränderlichen x, y, y' abhängen. Diesen Zusammenhang wollen wir durch die Schreibweise

$$(113) \qquad f_{i)} = F_{i)}(\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots; \partial_{\mathrm{I}}, \partial_{\mathrm{II}} | X_1, X_2, P_1, P_2, \alpha, \beta; \partial_1, \partial_2) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

andeuten, worin natürlich α, β durch (21) erklärt sind. In der Schreibweise (113) ist implizit die Möglichkeit des Auftretens der Op.n $\partial_\alpha, \partial_\beta$ enthalten. Bezüglich derjenigen $f_{k)}$, welche keinem $\mathfrak{f}_{k)}$ entsprechen, soll die Funktion $F_{k)}$ von den $\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots$ frei sein dürfen.

Ist z. B. $\mathfrak{f}_{1)} = \mathfrak{U}$ die allgemeine ch. Fu. einer ebenen B.T.s-Gruppe $\mathfrak{G}$ und sind die übrigen $\mathfrak{f}_{j)}$ $(j = 2, \ldots)$ die Koeffizienten der Defgl.n für $\mathfrak{U}$, dann ist $f_{1)} = U$ die allgemeine ch. Fu. der transformierten Gruppe G und die übrigen $f_{i)}$ $(i = 2, \ldots)$ sind die Koeffizienten der transformierten Defgl.n für U; die Gruppe G ist die allgemeinste mit $\mathfrak{G}$ ähnliche B.T.s-Gruppe. Die $f_{i)}$ $(i = 2, \ldots)$ hängen hier nur von den $\mathfrak{f}_{j)}$ $(j = 2, \ldots)$ ab.

Ein weiteres Beispiel bieten die $\mathfrak{f}_{j)}(j = n, \ldots)$ als die Koeffizienten einer in

$$\mathfrak{y}'' = \mathfrak{f}_{1)}, \ldots, \mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{f}_{n-1)}$$

rationalen Diffgl. n-ter O. $\mathfrak{D}^{(n)} = 0$, wobei dann die $f_{i)}(i = n, \ldots)$ die Koeffizienten der

transformierten Diffgl. $D^{(n)} = 0$ darstellen und $f_{1)} = y'', \ldots, f_{n-1)} = y^{(n)}$; $D^{(n)} = 0$ ist die allgemeinste Diffgl., welche durch B.T. in die Diffgl. $\mathfrak{D}^{(n)} = 0$ übergeführt werden kann.

Die Formeln (113) müssen naturgemäß ihre Gestalt behalten, wenn die Variablen x, y, y' noch beliebigen B.T.n

$$(114) \qquad x = x(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}'), \quad y = y(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}'), \quad y' = y'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}')$$

unterworfen werden. Wir nehmen daher mit x, y, y' die dualistische Trf.

$$(115) \qquad x = \tilde{y}', \quad y = \tilde{x}\tilde{y}' - \tilde{y}, \quad y' = \tilde{x}$$

vor; die den Variablen $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}'$ entsprechenden Op.n ∂_i bezeichnen wir für den Augenblick mit $\partial_{\tilde{i}}$. Durch die Gleichungen

$$(116) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}') = X, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}') = Y, \quad \mathfrak{y}' = \mathfrak{y}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}') = P,$$

wo X, Y, P dieselben Funktionen von x, y, y' wie in (14) bedeuten, wird dann wieder die allgemeinste B.T. repräsentiert. Das System (113) nimmt also vermöge (115) die Gestalt an

$$(117) \quad \tilde{f}_{i)} = F_{i)}(\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots, \partial_{\mathrm{I}}, \partial_{\mathrm{II}} | X_{\tilde{1}}, X_{\tilde{2}}, P_{\tilde{1}}, P_{\tilde{2}}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}; \partial_{\tilde{1}}, \partial_{\tilde{2}}) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Da indessen

$$(117') \qquad \partial_{\tilde{1}} = \partial_2, \ \partial_{\tilde{2}} = \partial_1; \quad \tilde{\alpha} = \alpha', \ \tilde{\beta} = \beta' \quad (\alpha\alpha' = \beta\beta' = 1),$$

so folgt aus (117)

$$(118) \quad \tilde{f}_{i)} = f'_{i)} = F_{i)}(\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots; \partial_{\mathrm{I}}, \partial_{\mathrm{II}} | X_2, X_1, P_2, P_1, \alpha', \beta'; \partial_2, \partial_1)$$
$$= F'_{i)}(\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots; \partial_{\mathrm{I}}, \partial_{\mathrm{II}} | X_1, X_2, P_1, P_2, \alpha', \beta'; \partial_1, \partial_2) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Die Gleichungen (118) entstehen aus (113) formal durch Ausübung der Substitution (13). Wir schreiben allgemein, wenn f eine Größe ist, auf welche diese Substitution angewendet werden kann,

$$(119) \qquad \mathcal{S}f = f'.$$

Nun möge

$$(120) \quad \Phi_{k)}(\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots; \partial_{\mathrm{I}}, \partial_{\mathrm{II}} | f_{1)}, f_{2)}, \ldots; X_1, X_2, P_1, P_2, \alpha, \beta; \partial_1, \partial_2) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots)$$

ein gegenüber der allgemeinsten B.T. (114) inv.s System von Relationen darstellen, in welchem übrigens die Größen $\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots$ — und auch die Größen $f_{1)}, f_{2)}, \ldots$ — gar nicht vorzukommen brauchen. Unterwerfen wir das System (120) der Dualität (115), dann kommt wegen (117′) und (118)

$$(120') \quad \Phi_{k)}(\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots; \partial_{\mathrm{I}}, \partial_{\mathrm{II}} | f'_{1)}, f'_{2)}, \ldots; X_2, X_1, P_2, P_1, \alpha', \beta'; \partial_2, \partial_1)$$
$$= \mathcal{S}\Phi_{k)} = \Phi'_{k)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Das System (120′) muß aber dem System (120) gleichwertig sein, d. h. es gilt der Satz:

Satz 4. *Ist* (120) *ein gegenüber der allgemeinsten B.T.* (114) *inv.s Gleichungssystem, in welchem die Größen* $f_{1)}, f_{2)}, \ldots$ *und* $\mathfrak{f}_{1)}, \mathfrak{f}_{2)}, \ldots$ *— so weit sie in* (120) *überhaupt vorkommen — vermöge der allgemeinsten B.T.* (14) *miteinander in dem Zusammenhang* (113) *stehen, dann ist das System* (120) *äquivalent mit dem System* (120′), *welches mittels der formalen Substitution* (13) *aus* (120) *hervorgeht*[20]).

Im einzelnen gilt noch folgendes:

Ist $f_{1)} = U$ die ch. Fu. einer inf. B.T., dann wird $U' = -U$ (vgl. (51)); ist $f_{1)} = y''$, $f_{2)} = \varepsilon(x, y, y')$ in der Diffgl. 2. O. $y'' + \varepsilon = 0$, dann wird $(y'')' y'' = 1$, $\varepsilon'\varepsilon = 1$ (vgl.

---

[20]) Vgl. W. Neumer, Die gew. Diffgl.n 3. und 4. O., die lineare homogene Form erhalten können. I. II. III., dieses Journal **176**, S. 224—249; **177**, S. 13—36 und S. 65—81, Sätze 18 und 21; diese sind Sonderfälle des obigen Satzes.

unten (150)), so daß hierbei der Substitution $\mathfrak{S}$ die Umschreibung der Diffgl. $y'' + \varepsilon = 0$ in $\varepsilon' y'' + 1 = 0$ entspricht. Ferner ist klar, daß die Bemerkungen in § 1, 5 ebenfalls dem Satze 4 entnommen werden können.

Wenden wir den Satz 4 auf die Defgl.n (85) an, dann erhalten wir folgendes zu (85) äquivalente System

$$(121)\quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & M^{\alpha'\alpha'} + \alpha_1' M^{\alpha'} - \alpha_3' M = 0,\ M^{\beta'\beta'} + \beta_1' M^{\beta'} - \beta_3' M = 0 \\ \text{(b)} & M^{\alpha'\beta'} = -\sigma'^{\beta'} M^{\alpha'} + (\sigma'^{\alpha'} - \alpha_1') M^{\beta'} - (\omega' \sigma_3' - \alpha_3') M, \\ & M^{\beta'\alpha'} = (\tau'^{\beta'} - \beta_1') M^{\alpha'} - \tau'^{\alpha'} M^{\beta'} + (\omega' \tau_3' + \beta_3') M, \end{array}$$

wobei nach (85′)

$$(121')\quad \sigma' = \mathfrak{s} + \log(-\bar{\omega}' P^{\beta'}) = \mathfrak{s} + \log P_1,\ \tau' = \mathfrak{t} + \log(\bar{\omega}' X^{\alpha'}) = \mathfrak{t} + \log X_1,$$

$$(122)\quad \sigma' = \sigma + \log\alpha,\ \tau' = \tau + \log\beta.$$

Wie dann weiterhin gemäß Satz 4 zu verfahren ist, um aus den auf das System (85) bezüglichen Relationen die entsprechenden Relationen bezüglich des Systems (121) zu erhalten, bedarf keiner Auseinandersetzung. Lediglich die folgenden Beziehungen wollen wir noch anmerken, die auf Grund der Trf.s-Formeln (88), (107), (112) bei Beachtung von (6) sofort hingeschrieben werden können:

$$(123)\quad \begin{array}{l} \varphi' = \varphi + \log(-1);\ \chi' = -\frac{\chi}{\alpha},\ \psi' = -\frac{\psi}{\beta};\ \mathsf{A}' = \frac{\mathsf{A}}{\alpha^2},\ \mathsf{B}' = \frac{\mathsf{B}}{\beta^2},\ \Gamma' = \frac{\Gamma}{\alpha\beta}; \\ \Sigma_{1)}' = \mathsf{T}_{2)}' = -\frac{\Sigma_{1)}}{\alpha^2\beta} = -\frac{\mathsf{T}_{2)}}{\alpha^2\beta},\ \Sigma_{2)}' = \mathsf{T}_{1)}' = -\frac{\Sigma_{2)}}{\alpha\beta^2} = -\frac{\mathsf{T}_{1)}}{\alpha\beta^2};\ D' = D. \end{array}$$

Es versteht sich, daß auch die Substitution (86) der Substitution (13) zu unterwerfen ist.

§ 7. Der Grenzfall $\beta = \infty$.

Wenn in (21) β (oder α) $= \infty$ wird, müssen die bisher entwickelten allgemeinen Formeln versagen. Wir haben also die im Falle $\beta = \infty$ gültigen Formeln durch einen Grenzübergang zu gewinnen. Der theoretisch nächstliegende — und auch oft gangbarste — Weg hierzu wäre, die Substitution $\mathfrak{S}$ vorzunehmen und dann mit $\beta' \to 0$ zu streben. Aber bei diesem Verfahren hätten wir im Ergebnis u. a. überall die Größe α' und die Op. $\partial^{\alpha'}$ auftreten, so daß wir zur Vermeidung des Grenzfalles $\alpha' = \infty$ noch eine Umrechnung vornehmen müßten, um die Größe α und die Op. ∂_α erscheinen zu lassen. Dieser Umstand läßt sich vermeiden, wenn wir zunächst $\beta = \beta_{0)} = \text{const.}$ setzen und darauf $\beta_{0)} \to \infty$ streben lassen. Der Grenzübergang $\beta \to \infty$ auf diesem Umwege beschränkt die Allgemeinheit der Ergebnisse nicht, weil erstens bei konstantem β noch ∞^∞ Größen α die Relationen (24) befriedigen und zweitens die Relationen (24) bei diesem Grenzübergang dasselbe Ergebnis

$$(124)\quad \begin{array}{c} \alpha_{22\alpha\alpha} - 4\alpha_{23\alpha} + 6\alpha_{33} + \alpha_2(\alpha_{22\alpha} - 4\alpha_{23}) + 3\alpha_3\alpha_{22} = 0, \\ \alpha_{2222} = 0 \end{array}$$

liefern wie bei einem ganz beliebigen Grenzübergang $\beta \to \infty$, dem nur die Bedingung auferlegt ist, daß mit β' zugleich auch alle Op.n von β' verschwinden sollen. Die Gleichungen (124) sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Diffgl. $y'' + \alpha = 0$ durch P.T. in $y'' = 0$ verwandelt werden kann[21]).

Denken wir also $\beta = \beta_{0)} = \text{const.}$ und dividieren wir durch geeignete Potenzen von $\beta_{0)}$, so daß der Grenzübergang $\beta_{0)} \to \infty$ vollziehbar wird, dann erhalten wir aus dem allgemeinen System (85) das spezielle

$$(125)\quad \text{(a)}\ \begin{array}{c} M_{\alpha\alpha} + \alpha_2 M_\alpha + \alpha_3 M = 0, \\ M_{22} = 0 \end{array} \qquad \text{(b)}\ \begin{array}{l} M_{12} = -\sigma_2 M_1 + \sigma_1 M_2 - \sigma_3 M, \\ M_{21} = \tau_2 M_1 - \tau_1 M_2 + \tau_3 M, \end{array}$$

[21]) Vgl. a. a. O. [1]), S. 139, 141, sowie a. a. O. [2]), S. 192.

während an die Stelle der Größen (87), sofern wir

(126) τ ersetzen durch $\tau - \log \beta_{0)}$,

die folgenden treten:

$$\begin{aligned} &\varphi = \sigma + \tau, \quad \chi = 2\sigma_\alpha + \tau_\alpha - \alpha_2, \quad \psi = 2\tau_2 + \sigma_2, \\ &\mathsf{A} = \varphi_{\alpha\alpha} - \varphi_\alpha^2 + \alpha_2 \varphi_\alpha - \alpha_3, \quad \mathsf{B} = \varphi_{22} - \varphi_2^2, \\ &\Gamma = \sigma_{2\alpha} + \tau_{\alpha 2} - \sigma_\alpha \sigma_2 - 2\sigma_\alpha \tau_2 - \tau_\alpha \tau_2 + \alpha_2 \tau_2 . \end{aligned} \tag{127}$$

Die Festsetzung (126) entspricht einfach der Weglassung des Akzentes von τ, wenn wir nämlich an die Substitution S den Grenzübergang $\beta' \to 0$ anschließen und gemäß (122) wieder die Größe σ einführen, τ' aber beibehalten. Zwischen den Größen (87) und (127) besteht also der Zusammenhang

$$\chi \to \chi, \ \frac{\psi}{\beta_{0)}} \to -\psi, \ \mathsf{A} \to \mathsf{A}, \ \frac{\mathsf{B}}{\beta_{0)}^2} \to \mathsf{B}, \ \frac{\Gamma}{\beta_{0)}} \to -\Gamma, \quad \text{wenn} \quad \beta = \beta_{0)} \to \infty . \tag{127'}$$

Die Relationen (91), (92) spezialisieren sich zu (62), (69), worin jetzt $\chi, \ldots, \Gamma$ die Größen (127) bedeuten, während die Identitäten (93) sich in

$$\mathsf{A}_2 - 2\tau_2 \mathsf{A} \equiv \Gamma_\alpha - \varphi_\alpha \Gamma, \quad \mathsf{B}_\alpha - 2\sigma_\alpha \mathsf{B} \equiv \Gamma_2 - \varphi_2 \Gamma \tag{128}$$

verwandeln und die Relationen (70), (78) ihre Form behalten, ebenso wie die Festsetzungen (68) gültig bleiben. Die Identitäten (128) sind wieder eine Folge von (62), (70). Die Integrale (95) endlich reduzieren sich auf (73) mit denselben Konstanten $\chi_{0)}, \ldots, \Gamma_{0)}$. Somit können wir das Theorem 1 durch den Satz ergänzen:

Satz 5. *Die Kategorie aller P.T.n G_3^2 ist dadurch charakterisiert, daß ihre Gruppen durch Systeme* (125) *definiert werden können — also durch Systeme* (85) *mit der Basis* $(\alpha, \infty; \sigma, \tau)$ *—, so daß die Größen* α, σ, τ *die Beziehungen* (124), (62), (70), (69) *erfüllen; aus diesen folgen die Relationen* (78), *während die Identitäten* (128) *bereits auf Grund von* (62) *und* (70) *bestehen. Mit* $\varphi, \chi, \ldots, \Gamma$ *sind hier die Größen* (127) *gemeint.*

Den Grenzübergang $\beta = \beta_{0)} \to \infty$ wollen wir noch etwas weiter verfolgen. (97), (97′) werden

$$\begin{aligned} &\mathsf{A} = -(\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_\alpha^2) + \alpha_2 \sigma_\alpha + \alpha_{2\alpha} - \alpha_3, \quad \mathsf{B} = -(\tau_{22} + \tau_2^2), \\ &\Gamma = \sigma_{2\alpha} - 2\sigma_{\alpha 2} - \sigma_\alpha \sigma_2 + \alpha_{22} = \tau_{\alpha 2} - 2\tau_{2\alpha} - \tau_\alpha \tau_2 + \alpha_2 \tau_2 \end{aligned} \tag{129}$$

$$\mathsf{A}(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}(\tau_{\alpha\alpha} - \tfrac{1}{2}\tau_\alpha^2) + \tfrac{1}{2}\alpha_{2\alpha} - \alpha_3 + \tfrac{1}{4}\alpha_2^2, \quad \mathsf{B}(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}(\sigma_{22} - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2) . \tag{129'}$$

Ferner vereinfachen sich die Größen (103′), (105′) zu

$$\begin{aligned} &\Sigma_{1)} = \sigma_{2\alpha\alpha} + \tfrac{2}{3}(\alpha_{2\alpha 2} - 2\alpha_{22\alpha}) - \alpha_2(\sigma_{2\alpha} - \tfrac{2}{3}\alpha_{22}) + (\alpha_{\alpha 2} - 2\alpha_{2\alpha} + \alpha_2^2)\sigma_2, \\ &\Sigma_{2)} = \sigma_{\alpha 22} - \tfrac{2}{3}\alpha_{222}; \quad \mathsf{T}_{1)} = \tau_{\alpha 22} + \tfrac{1}{3}\alpha_{222}, \\ &\mathsf{T}_{2)} = \tau_{2\alpha\alpha} + \tfrac{1}{3}(2\alpha_{22\alpha} - \alpha_{2\alpha 2}) - \alpha_2(\tau_{2\alpha} + \tfrac{1}{3}\alpha_{22}) + (\alpha_{\alpha 2} - 2\alpha_{2\alpha} + \alpha_2^2)\tau_2, \end{aligned} \tag{130}$$

indem wir für den Übergang der Größen (103′), (105′) in die Größen (130) die Festsetzung treffen

$$\frac{\Sigma_{1)}}{\beta_{0)}} = \frac{\mathsf{T}_{2)}}{\beta_{0)}} \to -\Sigma_{1)} = -\mathsf{T}_{2)}, \quad \frac{\Sigma_{2)}}{\beta_{0)}^2} = \frac{\mathsf{T}_{1)}}{\beta_{0)}^2} \to \Sigma_{2)} = \mathsf{T}_{1)} . \tag{130'}$$

Die Relationen (100), (104) reduzieren sich auf

$$\mathsf{B}_2(\tfrac{1}{4}) - 2\sigma_2 \mathsf{B}(\tfrac{1}{4}) = 0, \quad \mathsf{B}_1(\tfrac{1}{4}) - 2\sigma_1 \mathsf{B}(\tfrac{1}{4}) = 0 , \tag{131}$$

$$\mathsf{A}_1(\tfrac{1}{4}) - 2\tau_1 \mathsf{A}(\tfrac{1}{4}) = 0, \quad \mathsf{A}_2(\tfrac{1}{4}) - 2\tau_2 \mathsf{A}(\tfrac{1}{4}) = 0 , \tag{131*}$$

während die Gleichungen (103) und (105) ihre Gestalt behalten. Die Determinante (40) oder (112) lautet jetzt einfach

$$D = \mathsf{AB} - \Gamma^2. \tag{132}$$

Die kommutable inf. B.T. der G_3^2 (125) ist durch (54a) und (127_1) gegeben.

Schließlich möge noch in den Trf.s-Formeln (85′), (88) und (107) der Grenzübergang $\beta_{0)} \to \infty$ vollzogen werden, wobei zu beachten, daß jetzt

$$P_1 = \alpha P_2, \quad X_2 = 0: \tag{133}$$

$$\sigma = \mathfrak{s} + \log P_2, \quad \tau = \mathfrak{t} + \log X_1, \tag{134}$$

$$\chi = X_1 \widehat{\chi}, \quad \psi = P_2 \widehat{\psi}, \quad \mathsf{A} = X_1^2 \mathfrak{A}, \quad \mathsf{B} = P_2^2 \mathfrak{B}, \quad \Gamma = X_1 P_2 \mathfrak{C}, \tag{135}$$

$$\Sigma_{1)} = \mathsf{T}_{2)} = X_1^2 P_2 \mathfrak{s}_{\mathrm{III\,I}} = X_1^2 P_2 \mathfrak{t}_{\mathrm{III\,I}}, \quad \Sigma_{2)} = \mathsf{T}_{1)} = X_1 P_2^2 \mathfrak{s}_{\mathrm{I\,III}} = X_1 P_2^2 \mathfrak{t}_{\mathrm{I\,III}}. \tag{136}$$

Das ebenso leicht zu findende Ergebnis des Grenzübergangs hinsichtlich der Formeln (90) wollen wir nicht hinschreiben. Bei dem Grenzübergang zu (134) ist (126) zu berücksichtigen.

Den Grenzübergang $\alpha \to \infty$ gewinnen wir aus dem soeben vollzogenen durch Anwendung der Substitution (86).

Beide Grenzübergänge $\beta \to \infty$ und $\alpha \to \infty$ können der Substitution (13) unterworfen werden, d. h. mittels dieser Substitution lassen sich die Grenzübergänge $\beta' \to \infty$ und $\alpha' \to \infty$, d. h. $\beta \to 0$ und $\alpha \to 0$ hinsichtlich des Systems (121) sofort hinschreiben.

Eingegangen 1. Februar 1939.

Untersuchung fastperiodischer Funktionen mittels äquidistanter Zahlenmengen.

Von *Theodor Kaluza jun.* in Braunschweig *).

Einleitung.

Aus der von H. Bohr entwickelten Theorie der (komplexen) stetigen fastperiodischen Funktionen einer reellen Veränderlichen werden in dieser Arbeit bei den Beweisen folgende Begriffe und Ergebnisse benutzt:

Eine Menge von reellen Zahlen heißt *relativ dicht*, wenn es ein $L > 0$ gibt derart, daß jedes Intervall $\alpha < x < \alpha + L$ mindestens eine Zahl der Menge enthält.

Ist $f(x)$ in $-\infty < x < +\infty$ definiert und ist bei festem τ

$$| f(x+\tau) - f(x) | \leqq \varepsilon \text{ für alle } x,$$

so heißt τ *eine zu* ε *gehörige Verschiebungszahl von* $f(x)$. Man schreibt $\tau = \tau_{f(x)}(\varepsilon)$.

Eine in $-\infty < x < +\infty$ stetige Funktion heißt *fastperiodisch*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von $\tau_{f(x)}(\varepsilon)$ gibt. Man benutzt die Abkürzung fp. für fastperiodisch.

Die Symbole $f(x)$ und $g(x)$ bedeuten fortan stets solche stetigen fp. Funktionen. Dann gelten folgende Sätze:

$f(x)$ ist beschränkt und gleichmäßig stetig.

Für zwei beliebige fp. Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von zu ε gehörigen gemeinsamen Verschiebungszahlen

$$\tau = \tau_{f(x)}(\varepsilon) = \tau_{g(x)}(\varepsilon).$$

Mit $f(x)$ und $g(x)$ sind auch $f(x) \pm g(x)$, $\overline{f(x)}$, $f(x) \cdot g(x)$, $| f(x) |$ fastperiodisch.

Es existiert der Mittelwert

$$\underset{x}{M}\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

(a beliebig fest).

Die Funktion $a(\lambda) = \underset{x}{M}\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ ist an höchstens abzählbar unendlich vielen Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von 0 verschieden. Man setzt $a(\lambda_n) = a_n$ und ordnet $f(x)$ formal die *Fourierreihe* $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ zu:

$$f(x) \sim \sum a_n e^{i\lambda_n x}.$$

Die λ_n bezeichnet man als die Fourierexponenten, die a_n als die Fourierkoeffizienten von $f(x)$.

---

*) Diese Arbeit hat der Philosophischen Fakultät der Christian-Albrechts-Universität Kiel als Dissertation vorgelegen. Referent war Herr Prof. Dr. Hammerstein.

Die Fourierreihe von $f(x) + g(x)$ entsteht durch formale Addition der Fourierreihen von $f(x)$ und $g(x)$. Ferner ist

$$c \cdot f(x) \sim \Sigma c a_n e^{i\lambda_n x},$$
$$f(x+\alpha) \sim \Sigma a_n e^{i\lambda_n \alpha} e^{i\lambda_n x},$$
$$e^{i\lambda x} f(x) \sim \Sigma a_n e^{i(\lambda_n+\lambda)x}.$$

Es ist $\Sigma |a_n|^2 \leqq M\{|f(x)|^2\}$, also $\Sigma |a_n|^2$ konvergent.

Sind $c_1, \ldots, c_n$ beliebige komplexe und $\delta_1, \ldots, \delta_n$ irgendwelche reelle Zahlen, so ist, wie man einfach durch Umformung zeigen kann,

$$M\{|f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{i\delta_\nu x}|^2\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_{\nu=1}^{n} |a(\delta_\nu)|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu - a(\delta_\nu)|^2.$$

Ist $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ gleichmäßig konvergent, so ist diese Reihe die Fourierreihe der durch sie dargestellten (fp.) Funktion.

Ist $f(x)$ reinperiodisch mit der Periode P, so sind alle Fourierexponenten von $f(x)$ ganzzahlige Vielfache von $\frac{2\pi}{P}$, also $a(\lambda) = 0$ für $\lambda \neq k\frac{2\pi}{P}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Insbesondere ist

$$a\left(k\frac{2\pi}{P}\right) = M\{f(x)e^{-ik\frac{2\pi}{P}x}\} = \lim_{P\to\infty} \frac{1}{P} \int_0^P f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{P}x}\, dx.$$

Alle diese Tatsachen lassen sich sehr einfach und mit ganz elementaren Mitteln und Schlüssen beweisen.

Wirklich tiefliegende Sätze sind dagegen der

Eindeutigkeitssatz. Ist $a(\lambda) \equiv 0$, so ist auch $f(x) \equiv 0$.

Ebenso der mit ihm gleichwertige

Approximationssatz. $f(x)$ läßt sich gleichmäßig approximieren durch Exponentialpolynome $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{i\lambda_\nu x}$, wobei als Exponenten nur Fourierexponenten von $f(x)$ gewählt zu werden brauchen.

Diese beiden Sätze werden im folgenden aber nur an zwei Stellen benutzt und die dabei gewonnenen Resultate nicht weiter angewendet, so daß bis auf diese Ausnahme die Ergebnisse dieser Arbeit als elementar bewiesen gelten können, denn auch die Beweise dieser Arbeit benutzen nur die grundlegenden Begriffe und Schlußweisen der Analysis; sie vermeiden selbst die gewöhnliche Fourierreihentheorie der reinperiodischen Funktionen.

Problemstellung und heuristische Bemerkungen.

Die Menge der Zahlen $k\omega + \alpha$ mit $\omega > 0$, $\alpha \geqq 0$ und $k = 0, \pm 1, \ldots$ nennen wir *äquidistant*.

Mit k bezeichnen wir fortan ganze Zahlen, mit n natürliche.

Die Fastperiodizität stellt der Reinperiodizität gegenüber eine zweifache Auflockerung dar: An die Stelle der Periode P mit $f(x+P) - f(x) = 0$ tritt die Verschiebungszahl τ mit $|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon$, und während die Perioden kP äquidistant sind, wird von den Verschiebungszahlen bloß verlangt, daß sie relativ dicht liegen.

Indem nur die erste der beiden Auflockerungen vorgenommen wird, stellt sich bereits unmittelbar aus der Definition heraus — also noch vor allen Approximationsbetrachtungen und vor der Fourierreihentheorie — die Frage, ob die Klasse derjenigen Funktionen, die zu jedem $\varepsilon > 0$ äquidistante Verschiebungszahlen besitzen, eine zwischen den reinperiodischen und den fp. Funktionen liegende Mittelklasse ist oder ob sie mit einer dieser beiden Klassen identisch ist.

Wir werden später noch zwingendere Gründe antreffen, uns für diese Klasse und allgemein für äquidistante Verschiebungszahlen zu interessieren.

Hat $f(x)$ die Periode P, so ist $f(x + kP) = f(x)$. Ein weiteres Äquidistanzproblem ist also die Frage, was dem bei den fp. Funktionen entspricht.

Auf diese beiden Äquidistanzfragen (nach äquidistanten Verschiebungszahlen und nach den Funktionswerten an äquidistanten Stellen) zugleich stößt man bei der Verfolgung der von H. Bohr [1]) gemachten Bemerkung: „Übrigens gibt es in der allgemeinen Theorie der fp. Funktionen keinen diesem einfachen Lebesgueschen Beweis entsprechenden Beweis des dortigen Eindeutigkeitssatzes".

Der Lebesguesche Beweis des Eindeutigkeitssatzes für reinperiodische Funktionen geht so vor: Wäre etwa $f(0) > 0$, so wird dieser Wert „betont", indem $f(x)$ mit einer hohen Potenz von $\psi(x) = \cos x + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ multipliziert wird. $\psi^n(x)$ ist ja sehr groß in einer mit ε sehr kleinen Umgebung von 0, dagegen sehr klein im Rest des Intervalles $(-\pi, +\pi)$. Das Integral $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\psi^n(x)\,dx$ ist daher, wie man leicht abschätzt, > 0, falls n groß genug ist. Andererseits ist aber $\psi^n(x)$ ein Exponentialpolynom. Also müßte das Integral $= 0$ sein, da ja $a(\lambda) \equiv 0$ sein sollte.

Genau so würde man bei einer nur fp. Funktion $f(x)$ mit $a(\lambda) \equiv 0$ die Abschätzung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\psi^n\left(\frac{2\pi}{\omega}\,x\right)dx > 0$$

durchführen können, wenn es sicher wäre, daß $f(k\omega) > d > 0$ ist für alle k (oder wenigstens für „überwiegend" viele). Und das würde aus $f(0) > 0$ jedenfalls dann folgen, wenn man äquidistante Verschiebungszahlen $k\omega$ fände, die alle zu einem $\varepsilon < f(0) - d$ gehören. Bei den Integralen $\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\psi^n\left(\frac{2\pi}{\omega}\,x\right)dx$ sind durch den Faktor ψ^n gleichlange Umgebungen der Stellen $k\omega$ gleichstark betont, während der Integrand im übrigen sehr klein ist. Dividiert man also die Länge der betonten Intervalle und den betonenden Faktor fort, so wird aus $\int_0^T \ldots$ ungefähr $\sum_{0\leqq n\omega\leqq T} f(n\omega)$, und durch Multiplikation mit der Periode ω kann man ferner $\frac{1}{T}$ in die reziproke Anzahl $\frac{\omega}{T}$ der betonten Stellen verwandeln. Durch diese Operationen wird der Versuch nahe gelegt, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu\omega)$ zu bilden.

Ist also die Bohrsche Bemerkung auch in dem Sinne richtig, daß eine Verallgemeinerung des Lebesgueschen Beweises tatsächlich unmöglich ist, so können keine solchen geeigneten äquidistanten Verschiebungszahlen vorhanden sein, und es müssen daher die Mittelwerte $M\left\{f(x)\,\psi^n\left(\frac{2\pi}{\omega}\,x\right)\right\}$ und also wahrscheinlich auch die Mittelwerte $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu\omega)$ für alle ω verschwinden.

---

[1]) H. Bohr, Fastperiodische Funktionen, Ergebnisse der Mathematik **1** (1932), S. 417-516.

Ist nun $f(x)$ nicht mehr die beim indirekten Beweis des Eindeutigkeitssatzes fingierte, sondern eine beliebige fp. Funktion, so kann man auch für sie $M\left\{f(x)\,\psi^n\left(\frac{2\pi}{\omega}\,x\right)\right\}$ bilden. Da $\psi^n(x) = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu e^{i\delta_\nu x}$ ein Exponentialpolynom ist, ist

$$M\left\{f(x)\,\psi^n\left(\frac{2\pi}{\omega}\,x\right)\right\} = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu\, a(-\delta_\nu).$$

Also liegt die Vermutung auf der Hand, daß auch zwischen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu\omega)$ und den Fourierkoeffizienten von $f(x)$ ein ähnlicher Zusammenhang bestehen muß.

Dieser Zusammenhang ließe sich z. B. auf die oben angedeutete Art ermitteln, wobei aber die Handhabung der Funktion $\psi^n(x)$ zum mindesten weitschweifige Nebenrechnungen erfordern würde. Man kommt aber bereits zum Ziel, wenn man statt $\psi^n(x)$ als Betonungsfunktion

$$B_\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x - k\omega| < \eta \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad x = k\omega \pm \eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \left(0 < \eta < \frac{\omega}{2}\right)$$

wählt. Die Operationen z. B., die $M\{f(x)\,B_\eta(x)\}$ in einen Näherungswert für $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu 2\pi)$ überführen sollten, schrumpfen jetzt nämlich auf die Multiplikation mit $\frac{\pi}{\eta}$ zusammen. Denn für $\omega = 2\pi$ ist nach Definition von $B_\eta(x)$

$$M\{f(x)\,B_\eta(x)\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\,2\pi}\left[\int_0^{\eta} f(x)\,dx + \int_{2\pi-\eta}^{2\pi+\eta} f(x)\,dx + \cdots + \int_{n2\pi-\eta}^{n2\pi} f(x)\,dx\right].$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ unterscheiden sich die Integrale für kleines η beliebig wenig von $2\eta f(\nu 2\pi)$. Die Multiplikation mit $\frac{\pi}{\eta}$ ergibt also umso genauer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu\,2\pi),$$

je kleiner η ist. Die Funktion $B_\eta(x)$ ist andererseits stückweise stetig und reinperiodisch, so daß ihre Fourierreihe zu einer näherungsweisen Darstellung verwendet werden kann, wodurch dann mit Hilfe geeigneter Grenzübergänge der Zusammenhang mit den Werten $M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\} = a(\lambda)$ hergestellt wird. Entsprechend verfährt man für beliebiges ω.

Der so skizzierte Gedanke wird in seiner strengen Durchführung den Beweis für Satz 2 bilden. Dabei wird auch die in diesem Zusammenhang schon angeschnittene Frage nach den Verschiebungszahlen in äquidistanten Mengen eine Rolle spielen, so daß sie zuerst angefaßt werden soll. Eine hierfür ausreichende Aussage ist der Satz 1. Die speziellere Frage, inwieweit äquidistante Mengen existieren, die ganz aus Verschiebungszahlen bestehen, wird uns auf die Definition der *Periodizitätsgrenze* führen, deren Untersuchung erkennen lassen wird, was eigentlich von der Reinperiodizität übrig bleibt, wenn man die Verallgemeinerung zur Fastperiodizität vornimmt.

§ 1. Verschiebungszahlen in äquidistanten Mengen.

Eine erste allgemeine Auskunft über die in äquidistanten Mengen vorhandenen Verschiebungszahlen verschaffen wir uns mit Hilfe der wohl zuerst von Bochner [2]) benutzten *Verschiebungsfunktion*

$$\varepsilon(\tau) = \text{obere Grenze}_{-\infty<x<+\infty} |f(x+\tau) - f(x)| .$$

$\varepsilon(\tau)$ ist also das kleinste ε, zu dem τ eine Verschiebungszahl ist, und jedes τ, für das $\varepsilon(\tau) \leqq \varepsilon_1$ ist, ist eine zu ε_1 gehörige Verschiebungszahl von $f(x)$.

Die fp. Funktion $f(x)$ und die zugehörige Funktion $\varepsilon(\tau)$ haben die „gleichen" Verschiebungszahlen, d. h. es gilt der

Hilfssatz. Mit $f(x)$ ist auch die zugehörige Funktion $\varepsilon(\tau)$ stetig und fp., und zwar ist jede zu ε gehörige Verschiebungszahl der einen Funktion auch eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der anderen Funktion.

Beweis. 1. Es sei $T = \tau_f(\eta)$. Dann ist für alle x und beliebiges festes τ

$$|f(x+\tau+T) - f(x)| = |f(x+\tau+T) - f(x+\tau) + f(x+\tau) - f(x)| \leqq \eta + \varepsilon(\tau),$$

also auch

$$\varepsilon(\tau+T) \leqq \eta + \varepsilon(\tau).$$

Entsprechend ist

$$|f(x+\tau+T) - f(x+T)| = |f(x+\tau+T) - f(x) + f(x) - f(x+T)| \leqq \varepsilon(\tau+T) + \eta$$

und also

$$\varepsilon(\tau) \leqq \varepsilon(\tau+T) + \eta .$$

Mithin ist tatsächlich

$$|\varepsilon(\tau+T) - \varepsilon(\tau)| \leqq \eta .$$

2. Es sei $T = \tau_{\varepsilon(\tau)}(\eta)$. Setzen wir dann in $|\varepsilon(\tau+T) - \varepsilon(\tau)| \leqq \eta$ speziell $\tau = 0$, so haben wir

$$|\varepsilon(T) - \varepsilon(0)| = \varepsilon(T) \leqq \eta, \quad \text{also} \quad T = \tau_{f(x)}(\eta).$$

Die „Gleichheit" der Verschiebungszahlen ist damit erwiesen. Ist nun $|f(x+h) - f(x)| \leqq \varepsilon$ für jedes h mit $|h| \leqq \delta(\varepsilon)$, so heißt das: Jedes solche h ist eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $f(x)$, nach 1. also auch von $\varepsilon(\tau)$. Daher ist $\varepsilon(\tau)$ sogar gleichmäßig stetig mit demselben $\delta(\varepsilon)$ wie $f(x)$, und wegen 1. also auch fp.

Dies genügt schon zum Beweis von

Satz 1. *$f(x)$ sei irgendeine stetige fp. Funktion, und $\varepsilon > 0$ sowie $\omega \neq 0$ seien beliebige reelle Zahlen. Dann enthält die äquidistante Menge $k\omega$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) eine relativ dichte Teilmenge, die ganz aus zu ε gehörigen Verschiebungszahlen von $f(x)$ besteht.*

Beweis [3]). Wir setzen $\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda}$. Die Funktionen $f(x)$ und $e^{i\lambda x}$ besitzen dann zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von gemeinsamen Verschiebungszahlen.

Ist $\delta > 0$ beliebig gegeben, so kann ε_1 so klein gewählt werden, daß alle zu ε_1 gehörigen Verschiebungszahlen von $e^{i\lambda x}$ in den δ-Umgebungen der Zahlen $k\dfrac{2\pi}{\lambda}$ liegen. Denn wenn $\tau = \tau_{e^{i\lambda x}}(\varepsilon_1)$ ist, muß $|e^{i\lambda(x+\tau)} - e^{i\lambda x}| = |e^{i\lambda\tau} - 1| \leqq \varepsilon_1$ sein. Ist nun

---

[2]) S. Bochner, Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I., Math. Ann. **96** (1927), S. 136. Der Begriff selbst, ohne eingehendere Untersuchung, findet sich unter dem Namen „Minimalfehler" schon in der ersten Bohrschen Abhandlung (H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I., Acta Math. **45** (1925)).

[3]) Für $\omega = 1$ ist der Satz bereits von H. Bohr ausgesprochen worden. Der Beweis benutzt ebenfalls das Vorhandensein gemeinsamer Verschiebungszahlen von $f(x)$ und einer von ε abhängigen ad hoc konstruierten Hilfsfunktion. Vgl. H. Bohr, a. a. O. [2]), S. 88.

$\varepsilon > 0$ das gegebene ε, so bestimmen wir das $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ der gleichmäßigen Stetigkeit:

$$|\varepsilon(\tau + h) - \varepsilon(\tau)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad |h| \leqq \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Danach denken wir uns $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ so klein gewählt, daß alle $\tau_{e^{i\lambda x}}(\varepsilon_1)$ in den $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$-Umgebungen der Zahlen $k\frac{2\pi}{\lambda} = k\omega$ liegen.

In diesen $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$-Umgebungen muß daher auch die relativ dichte Menge von zu ε_1 gehörigen gemeinsamen Verschiebungszahlen von $f(x)$ und $e^{i\lambda x}$ oder, was ja dasselbe ist, von $\varepsilon(\tau)$ und $e^{i\lambda x}$ liegen. Für jedes Element τ aus dieser Menge gibt es also eine ganze Zahl k, so daß

$$\left|\tau - k\frac{2\pi}{\lambda}\right| = |\tau - k\omega| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

und also

$$|\varepsilon(\tau) - \varepsilon(k\omega)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Wegen $\tau = \tau_{f(x)}(\varepsilon_1) = \tau_{e^{i\lambda x}}(\varepsilon_1)$ muß aber $\varepsilon(\tau) \leqq \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ sein, woraus $\varepsilon(k\omega) < \varepsilon$, also $k\omega = \tau_{f(x)}(\varepsilon)$ folgt. Da schließlich die Menge dieser τ relativ dicht war, müssen auch die zugehörigen ganzen Zahlen k relativ dicht liegen, q. e. d.

§ 2. Mittelwert äquidistanter Funktionswerte.

Satz 2. *Ist $f(x)$ irgendeine stetige fp. Funktion, und sind $\omega \neq 0$ und α reelle Zahlen, so ist*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{p} f(n\omega + \alpha) = a(0) + \lim_{\eta\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k\eta}\left[a\left(k\frac{2\pi}{\omega}\right)e^{ik\alpha\frac{2\pi}{\omega}} + a\left(-k\frac{2\pi}{\omega}\right)e^{-ik\alpha\frac{2\pi}{\omega}}\right],$$

wobei (wie üblich) $a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ bedeutet.

Beweis. Es sei $0 < y < \pi$. Diese Beschränkung ist nur für die folgende Integration notwendig und wird sich später leicht beseitigen lassen.

Für $|x| < 1$ ist die Reihe

$$\sin y - x \sin 2y + x^2 \sin 3y - + \cdots$$

konvergent, und wie man durch Ausmultiplizieren einsieht, hat sie den Wert

$$(1) \qquad \sin y - x \sin 2y + x^2 \sin 3y - + \cdots = \frac{\sin y}{1 + 2x\cos y + x^2}.$$

Denn in dem Ausdruck

$$[\sin y - x \sin 2y + x^2 \sin 3y - + \cdots](1 + 2x\cos y + x^2)$$

hat ja x^n für $n > 0$ den Koeffizienten

$$\begin{aligned}&(-1)^n[\sin(n+1)y - 2\sin ny\cos y + \sin(n-1)y]\\ &= (-1^n[\sin ny\cos y + \cos ny\sin y - 2\sin ny\cos y\\ &\qquad + \sin ny\cos y - \cos ny\sin y] = 0.\end{aligned}$$

Die Reihe (1) ist nun als Potenzreihe gliedweise integrierbar. Auf der rechten Seite ergibt sich dabei

$$\int_0^x \frac{\sin y\,dx}{1+2x\cos y+x^2} = \frac{1}{\sin y}\int_0^x \frac{dx}{1+\left(\frac{x+\cos y}{\sin y}\right)^2} = \int_{\operatorname{ctg} y}^{u} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= -\operatorname{arc\,ctg} u\Big|_{\operatorname{ctg} y}^{u} = y - \operatorname{arc\,ctg}\frac{x+\cos y}{\sin y}.$$

Also ist für $|x|<1$ und $0<y<\pi$

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\frac{\sin ny}{n} = y - \operatorname{arc\,ctg}\frac{x+\cos y}{\sin y}.$$

Wenn diese Reihe nun auch noch für $x=+1$ konvergiert, so ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz

$$\sin y - \frac{\sin 2y}{2} + \frac{\sin 3y}{3} - + \cdots = y - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1+\cos y}{\sin y} = y - \operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\right) = \frac{y}{2}.$$

Das letzte wegen

$$\frac{1+\cos y}{\sin y} = \frac{2\cos^2\frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{y}{2}.$$

Wegen $\sin 0 = 0$ und $\sin(-ny) = -\sin ny$ würde dann die Beziehung

$$(3)\qquad \sin y - \frac{\sin 2y}{2} + \frac{\sin 3y}{3} - + \cdots = \frac{y}{2}$$

nicht nur für $0<y<\pi$, sondern für $-\pi<y<+\pi$ gelten, und wegen $\sin k\pi = 0$ (k ganz), und der Periodizität der Reihenglieder würde daher die Reihe (3) überall konvergieren und eine Funktion mit der Periode 2π darstellen.

Der Abelsche Grenzwertsatz liefert uns also den Wert der Reihe (3), wenn sie konvergiert. Daß sie konvergiert, kann man durch Abelsche Summation so erkennen: Wir setzen

$$a_n(y) = \sin y + \frac{\sin 2y}{2} + \cdots + \frac{\sin ny}{n}$$

und

$$s_n(y) = \sin y + \sin 2y + \cdots + \sin ny.$$

Wegen $e^{i\nu y} = \cos\nu y + i\sin\nu y$ läßt sich dann $s_n(y)$ auffassen als Imaginärteil von $\sum_{\nu=1}^{n} e^{i\nu y}$; für $y \neq 2k\pi$ ist dann

$$s_n(y) = I\left[\sum_{\nu=1}^{n} e^{i\nu y}\right] = I\left[\frac{e^{iy}-e^{i(n+1)y}}{1-e^{iy}}\right] = I\left[e^{i\frac{n+1}{2}y}\,\frac{e^{-i\frac{n}{2}y}-e^{i\frac{n}{2}y}}{e^{-i\frac{y}{2}}-e^{i\frac{y}{2}}}\right]$$

$$= I\left[\left(\cos\frac{n+1}{2}y + i\sin\frac{n+1}{2}y\right)\frac{\sin\frac{n}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}\right].$$

Also gilt

$$|s_n(y)| \leqq \frac{1}{\left|\sin\frac{y}{2}\right|}, \qquad y \neq 2k\pi.$$

Nun ist aber (Abelsche Summation)

$$a_n(y) = s_1(y)\left(1 - \frac{1}{2}\right) + s_2(y)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + s_{n-1}(y)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + s_n(y)\frac{1}{n}.$$

Für $p > n$ haben wir also

$$|a_p(y) - a_n(y)| = \left| s_n(y)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + s_{p-1}(y)\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) + s_p(y)\frac{1}{p} - s_n(y)\frac{1}{n}\right| \leqq \frac{1}{\left|\sin\frac{y}{2}\right|}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\left|\sin\frac{y}{2}\right|}\cdot\frac{2}{n},$$

d. h.

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{p}\frac{\sin \nu y}{\nu}\right| \leqq \frac{2}{n\left|\sin\frac{y}{2}\right|}, \qquad y \neq 2k\pi. \tag{4}$$

Bezeichnen wir nun mit $A_n(y)$ die Abschnitte der Reihe (3):

$$A_n(y) = \sin y - \frac{\sin 2y}{2} + - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\sin ny}{n},$$

so ist

$$A_n(y) = -a_n(y + \pi)$$

und somit

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{p}(-1)^{\nu-1}\frac{\sin \nu y}{\nu}\right| \leqq \frac{2}{n\left|\cos\frac{y}{2}\right|}, \qquad y \neq (2k+1)\pi. \tag{5}$$

Damit ist die behauptete Konvergenz der Reihe (3) für alle y bewiesen, denn für $y = (2k+1)\pi$ ist sie ja trivial.

Selbstverständlich gelangt man direkt zur Abschätzung (5), wenn man die Prozedur, die zu (4) führte, auf die Reihe (3) selbst anwendet. Später werden wir aber von der Tatsache Gebrauch machen, daß die $A_n(y)$ für alle n und alle y gleichmäßig beschränkt sind, und zum Beweis dieser Tatsache reicht (5) nicht hin, wohl aber (4). Dies erkennt man folgendermaßen:

Es sei wieder $0 < y < \pi$; dann ist [4])

$$|a_n(y)| \leqq \left|\sum_{1 \leqq \nu \leqq \frac{1}{y}}\frac{\sin \nu y}{\nu}\right| + \left|\sum_{\frac{1}{y} < \nu \leqq n}\frac{\sin \nu y}{\nu}\right|.$$

Da nun $\frac{\sin y}{y}$ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ monoton fällt, ist dort stets $\frac{2}{\pi} \leqq \frac{\sin y}{y} \leqq 1$. Für die erste der beiden Summen folgt also:

$$\left|\sum_{1 \leqq \nu \leqq \frac{1}{y}}\frac{\sin \nu y}{\nu}\right| = y\left|\sum_{1 \leqq \nu \leqq \frac{1}{y}}\frac{\sin \nu y}{\nu y}\right| \leqq y\sum_{1 \leqq \nu \leqq \frac{1}{y}} 1 \leqq y \cdot \frac{1}{y} = 1$$

und für die zweite Summe folgt aus (4):

$$\left|\sum_{\frac{1}{y} < \nu \leqq n}\frac{\sin \nu y}{\nu}\right| \leqq \frac{2}{\frac{1}{y}\left|\sin\frac{y}{2}\right|} = \frac{4}{\left|\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right|} \leqq \frac{4}{\frac{2}{\pi}} = 2\pi,$$

[4]) Vgl. z. B. W. Rogosinski, Fouriersche Reihen, Berlin 1930, S. 20.

so daß für $0 < y < \pi$ und alle n

$$|a_n(y)| \leqq 1 + 2\pi$$

ist. Wegen $a_n(-y) = -a_n(y)$, $a_n(\pi) = 0$ gilt das dann aber auch für $-\pi \leqq y \leqq +\pi$, und wegen der Periode 2π von $a_n(y)$ also für jedes y, und aus $A_n(y) = -a_n(y+\pi)$ folgt schließlich

$$(6) \qquad \left| \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \frac{\sin \nu y}{\nu} \right| \leqq 1 + 2\pi \quad \text{für alle } n \text{ und alle } y.$$

Die gleichmäßige Beschränktheit folgt übrigens ohne weiteres aus der Gibbschen Erscheinung, die ja gerade an der Reihe $\sum_{\nu} \frac{\sin \nu y}{\nu}$ zuerst beobachtet wurde.

Aus (5) ergibt sich noch:

Ist $\delta > 0$ (aber $< \pi$) beliebig gegeben, so konvergiert die Reihe (3) gleichmäßig für alle y mit $|y - 2k\pi| \leqq \pi - \delta$, also außerhalb der δ-Umgebungen der Sprungstellen $(2k+1)\pi$.

Für jedes solche y ist nämlich

$$\left| \frac{y}{2} - k\pi \right| \leqq \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \quad \text{und also} \quad \left| \cos \frac{y}{2} \right| \geqq \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right) \right|.$$

Nach (5) ist also für $p > n$

$$|A_p(y) - A_n(y)| \leqq \frac{2}{n \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right) \right|},$$

womit die Gleichmäßigkeit der Konvergenz gezeigt ist.

Damit haben wir uns unter ausschließlicher Benutzung elementarer Sätze aus der Reihenlehre und insbesondere ohne Benutzung der Fourierreihentheorie einen genügenden Überblick über das Konvergenzverhalten der Reihe

$$(7) \quad A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} 0 & \text{in } x = k\pi \\ \dfrac{x - 2k\pi}{2} & \text{in } (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi \end{cases}$$

verschafft.

Diese Reihe (7) liefert uns nun eine Reihenentwicklung der *Betonungsfunktion* $B_\eta(x)$, die folgendermaßen definiert war:

$$B_\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } 2k\pi - \eta < x < 2k\pi + \eta \\ \dfrac{1}{2} & \text{in } x = 2k\pi \pm \eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (0 < \eta < \pi).$$

Subtrahiert man nämlich zwei verschobene Funktionen $A(x+\eta)$ und $A(x-\eta)$ voneinander, so entsteht eine stückweise konstante Funktion mit der Periode 2π.

Die Betonungsfunktion erhalten wir also als

$$B_\eta(x) = \frac{1}{\pi} [A(x + \pi - \eta) - A(x + \pi + \eta) + \eta]$$

$$= \frac{\eta}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} [\sin (kx + k\pi - k\eta) - \sin (kx + k\pi + k\eta)].$$

Setzen wir $kx + k\pi = \alpha$, so ist

$$\sin(\alpha - k\eta) - \sin(\alpha + k\eta) = -2\cos\alpha \sin k\eta .$$

Beachtet man noch

$$(-1)^k \cos\alpha = (-1)^k \cos(kx + k\pi) = \cos kx ,$$

so hat man

$$(8)\quad B_\eta(x) = \frac{\eta}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\sin k\eta}{k}\cos kx$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{in} \quad 2k\pi - \eta < x < 2k\pi + \eta \\ \frac{1}{2} & \text{in} \quad x = 2k\pi \pm \eta \qquad\qquad (0 < \eta < \pi). \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $0 < \delta < \mathrm{Min}(\eta, \pi - \eta)$ beliebig gegeben, so ist die Reihe (8) außerhalb der δ-Umgebungen der Sprungstellen $2k\pi \pm \eta$ gleichmäßig konvergent, also für alle x mit $|x - 2k\pi \pm \eta| \geqq \delta$. Denn die Reihe (8) ist ja durch Addition der Reihen für $A(x + \pi - \eta)$ und $A(x + \pi + \eta)$ gewonnen, und diese Reihen sind außerhalb der δ-Umgebungen ihrer Sprungstellen $2k\pi + \eta$ bzw. $2k\pi - \eta$ gleichmäßig konvergent.

Aus (6) ersieht man ebenso, daß die Reihenabschnitte von (8) gleichmäßig beschränkt sind:

$$|B_{n,\eta}(x)| = \left| \frac{\eta}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{\sin k\eta}{k}\cos kx \right| \leqq B$$

für alle x, alle n und alle $0 < \eta < \pi$.

Zum Abschluß unserer Vorbereitungen müssen wir noch zeigen, daß

$$M\{f(x)B_\eta(x)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,B_\eta(x)\,dx$$

existiert, wenn $f(x)$ irgendeine stetige fp. Funktion ist. Aus Satz (1) ergibt sich das so:

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so enthält die äquidistante Menge $k \cdot 2\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ eine relativ dichte Menge von zu ε gehörigen Verschiebungszahlen von $f(x)$. Ist $\tau = k_0 2\pi = \tau_{f(x)}(\varepsilon)$ eine solche, so ist sie auch eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $f(x)B_\eta(x)$. Es sei nämlich

1. $|x - 2k\pi| < \eta$. Dann ist $B_\eta(x + \tau) = B_\eta(x) = 1$, also
$$|f(x + \tau)B_\eta(x + \tau) - f(x)B_\eta(x)| = |f(x + \tau) - f(x)| \leqq \varepsilon .$$

2. $x = 2k\pi \pm \eta$. Dann ist $B_\eta(x + \tau) = B_\eta(x) = \frac{1}{2}$, also
$$|f(x + \tau)B_\eta(x + \tau) - f(x)B_\eta(x)| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon .$$

3. $|x - (2k + 1)\pi| < \pi - \eta$. Dann ist
$$B_\eta(x + \tau) = B_\eta(x) = 0 .$$

Folglich genügt $f(x)B_\eta(x)$ mit Ausnahme der Stetigkeit der Definition der Fastperiodizität, und da die Unstetigkeitsstellen $2k\pi \pm \eta$ auf die Mittelwertbildung als Integration natürlich keinen Einfluß haben, ist die Existenz von $M\{f(x)B_\eta(x)\}$ zu erwarten. In der Tat läßt sich der für einen stetigen fastperiodischen Integranden geführte Bohrsche Beweis [5]) wortgetreu auch für $f(x)B_\eta(x)$ führen.

---

[5]) Vgl. H. Bohr, a. a. O. [1]), S. 34.

Es sei nun also $f(x)$ irgendeine stetige fp. Funktion. Dann ist

$$(9)\quad M\{f(x)B_\eta(x)\} = \frac{\eta}{\pi}\,a(0) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\eta}{k}\,M\{f(x)\cos kx\} + \frac{2}{\pi}\,M\left\{f(x)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k}\cos kx\right\}.$$

Wir wollen zunächst den Mittelwert $M\left\{f(x)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k}\cos kx\right\}$ abschätzen, indem wir die Näherungswerte

$$\frac{1}{p\cdot 2\pi}\int_0^{p\cdot 2\pi} f(x)\sum_{n+1}^{\infty}\cdots dx$$

betrachten, und bei ihnen das Integrationsintervall in drei Arten von Teilintervallen aufspalten; dies seien

erstens die δ-Umgebungen der Sprungstellen $k2\pi \pm \eta$ $(0 < \delta < \mathrm{Min}\,(\eta, \pi - \eta))$,

zweitens die $(\pi - \eta - \delta)$-Umgebungen der Stellen $(2k+1)\pi$, in denen $B_\eta(x) = 0$ gleichmäßig konvergiert und also $\sum_{n+1}^{\infty}\ldots$ unabhängig von x beliebig klein gemacht werden kann,

drittens die $(\eta - \delta)$-Umgebungen der Stellen $k2\pi$, in denen $B_\eta(x) = 1$ ebenfalls gleichmäßig konvergiert.

Bezeichnen wir noch die obere Grenze von $|f(x)|$ mit F,

$$|f(x)| \leqq F \quad \text{in} \quad -\infty < x < +\infty,$$

und beachten, daß wegen $|B_{n,\eta}(x)| \leqq B$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k}\cos kx\right| = \frac{\pi}{2}\,|B_\eta(x) - B_{n,\eta}(x)| \leqq \frac{\pi}{2}\,(1+B) = E$$

ist, so erhalten wir für jede natürliche Zahl p

$$\left|\frac{1}{p\,2\pi}\left\{\int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} f(x)\sum_{n+1}^{\infty}\ldots dx + \int_{2\pi-\eta-\delta}^{2\pi-\eta+\delta}\ldots dx + \int_{2\pi+\eta-\delta}^{2\pi+\eta+\delta}\ldots dx + \cdots + \int_{p2\pi-\eta-\delta}^{p2\pi-\eta+\delta}\ldots dx\right\}\right| \leqq \frac{1}{p\,2\pi}\,2p\cdot 2\delta\cdot F\cdot E = \delta\,\frac{2EF}{\pi}.$$

Ist also $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, und wird irgendein η (zwischen 0 und π) gewählt, so gibt es ein $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \eta) > 0$ derart, daß

$$(10)\quad \left|\frac{1}{p\,2\pi}\left\{\int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} f(x)\sum_{n+1}^{\infty}\ldots dx + \int_{2\pi-\eta-\delta}^{2\pi-\eta+\delta}\ldots dx + \cdots + \int_{p2\pi-\eta-\delta}^{p2\pi-\eta+\delta}\ldots dx\right\}\right| \leqq \varepsilon$$

ausfällt für jedes $\delta \leqq \delta_0(\varepsilon, \eta)$. Dabei sind p und n völlig beliebig, und η und δ hängen nur durch die Forderung $\delta_0 < \eta$ zusammen. Die Teilintervalle zweiter und dritter Art können wir zusammen abschätzen:

$\varepsilon > 0$ und $0 < \eta < \pi$ seien beliebig gegeben und $\delta_0 > 0$ werde gemäß (10) bestimmt. Wählt man nun $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta, \delta_0)$ so groß, daß

$$|B_\eta(x) - B_{n,\eta}(x)| < \frac{\varepsilon}{F}\,\frac{2}{\pi}$$

ist für $n \geqq n_0$ und alle x mit $|x - 2k\pi \pm \eta| \geqq \delta_0$ — wegen der gleichmäßigen Kon-

vergenz für diese x ist das möglich —, so ist

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k} \cos kx \right| < \frac{\varepsilon}{F}$$

und also

$$(11) \qquad \left| \frac{1}{p\,2\pi} \left\{ \int_0^{\eta-\delta_0} f(x) \sum_{n+1}^{\infty} \ldots dx + \int_{2\pi-\eta+\delta_0}^{2\pi+\eta-\delta_0} \ldots dx + \int_{4\pi-\eta+\delta_0}^{4\pi+\eta-\delta_0} \ldots dx + \cdots \right\} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p\,2\pi} \left\{ \int_{\eta+\delta_0}^{2\pi-\eta-\delta_0} \ldots dx + \int_{2\pi+\eta+\delta_0}^{4\pi-\eta-\delta_0} \ldots dx + \cdots \right\} \right|$$
$$\leqq \frac{1}{p\,2\pi} \left[p\,2(\eta - \delta_0) F \frac{\varepsilon}{F} + p\,2(\pi - \eta - \delta_0) F \frac{\varepsilon}{F} \right] = \varepsilon \frac{\pi - 2\delta_0}{\pi} < \varepsilon .$$

Die geschweiften Klammern enthalten natürlich genau wie in (10) nur endlich viele Summanden: Es wird integriert über alle die Intervalle (oder ihre Teile) zweiter und dritter Art, die in $(0, p\,2\pi)$ liegen.

(10) und (11) zusammen bedeuten:

Sind $\varepsilon > 0$ und $0 < \eta < \pi$ irgendwie gegeben, so gibt es einen Index $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta)$, so daß

$$(12) \qquad \left| \frac{1}{p\,2\pi} \int_0^{p2\pi} f(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k} \cos kx\, dx \right| < \varepsilon$$

ist für jedes p und jedes $n \geqq n_0$.

Und daraus, daß (12) für alle p gilt, ergibt sich noch:

Wird $0 < \eta < \pi$ beliebig, aber fest gewählt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß

$$(13) \qquad \frac{1}{\eta} \left| \frac{2}{\pi} M\left\{ f(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k} \cos kx \right\} \right| \leqq \varepsilon$$

ist für $n \geqq n_0(\varepsilon, \eta)$.

Multipliziert man nun (9) mit $\frac{\pi}{\eta}$, so folgt aus (13):

Für jedes feste η mit $0 < \eta < \pi$ ist

$$(14) \qquad \frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\, B_\eta(x)\} = a(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k\eta} M\{f(x) \cos kx\}.$$

Nun sei irgendein $\varepsilon > 0$ gegeben und dann $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$ so klein gewählt, daß

$$|f(x+h) - f(x)| \leqq \varepsilon \quad \text{ist für} \quad |h| \leqq \eta_0.$$

Dann ist wegen

$$2\eta f(k2\pi) = \int_{k2\pi-\eta}^{k2\pi+\eta} f(k2\pi)\, dx$$

und wegen

$$\frac{\pi}{\eta} \frac{1}{p2\pi} \int_0^{p2\pi} f(x) B_\eta(x) dx = \frac{1}{\eta 2p} \left\{ \int_0^{\eta} f(x)dx + \int_{2\pi-\eta}^{2\pi+\eta} f(x)dx + \int_{4\pi-\eta}^{4\pi+\eta} f(x)dx + \cdots + \int_{p2\pi-\eta}^{p2\pi} f(x)dx \right\}$$

für jede natürliche Zahl p und jedes $\eta \leqq \eta_0(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{\eta 2p}\left[\int_0^{p2\pi} f(x)B_\eta(x)dx - \left(\eta f(0) + \sum_{k=1}^{p-1} 2\eta f(k2\pi) + \eta f(p2\pi)\right)\right]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\eta 2p}\left[\int_0^{\eta} (f(x)-f(0))\,dx + \sum_{k=1}^{p-1}\int_{2k\pi-\eta}^{2k\pi+\eta} (f(x)-f(k2\pi))\,dx + \int_{p2\pi-\eta}^{p2\pi} (f(x)-f(p2\pi))\,dx\right]\right|$$

$$\leqq \frac{1}{\eta 2p}\, p2\eta\varepsilon = \varepsilon$$

oder anders geschrieben:

$$(15)\qquad \left|\frac{1}{\eta 2p}\int_0^{p2\pi} f(x)B_\eta(x)\,dx - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f(k2\pi) + \frac{f(p2\pi)-f(0)}{2p}\right| \leqq \varepsilon$$

für alle natürlichen p und alle $\eta \leqq \eta_0$.

Hält man η fest, so sind die Summanden nur noch von p abhängig, also einfache Zahlenfolgen. Läßt man $p \to \infty$ gehen, so strebt die erste Folge gegen den Wert $\frac{\pi}{\eta} M\{f(x)B_\eta(x)\}$ und die dritte Folge $\to 0$. Folglich muß die zweite Folge $M_p = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f(k2\pi)$ beschränkt sein, und sind M und N irgend zwei ihrer Häufungspunkte, so folgt ebenso aus (15):

$$\left|M - \frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\,B_\eta(x)\}\right| \leqq \varepsilon, \qquad \left|N - \frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\,B_\eta(x)\}\right| \leqq \varepsilon,$$

also $|M-N| \leqq 2\varepsilon$ „für $\eta \leqq \eta_0(\varepsilon)$“, tatsächlich also für jedes $\varepsilon > 0$, da ja die M_p und also auch ihre Häufungspunkte von η völlig unabhängig sind. Es existiert also

$$M = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f(n2\pi).$$

Mithin wird aus (15):

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta_0(\varepsilon) > 0$, so daß

$$(16)\qquad \left|\frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\,B_\eta(x)\} - M\right| \leqq \varepsilon$$

ist für $\eta \leqq \eta_0(\varepsilon)$.

Das heißt aber:

Es existiert $\lim_{\eta\to 0} \frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\,B_\eta(x)\}$ und es ist

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\,B_\eta(x)\} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f(n2\pi).$$

Zusammen mit (14) liefert das die Gleichung

$$(17)\qquad \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f(n2\pi) = a(0) + \lim_{\eta\to 0}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k\eta}[a(k)+a(-k)].$$

Dabei ist in (14) noch die Umformung

$$M\{f(x)\cos kx\} = M\left\{f(x)\,\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right\} = \frac{1}{2}[a(-k)+a(k)]$$

vorgenommen worden.

vergenz für diese x ist das möglich —, so ist

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k} \cos kx \right| < \frac{\varepsilon}{F}$$

und also

$$(11) \quad \left| \frac{1}{p\,2\pi} \left\{ \int_0^{\eta-\delta_0} f(x) \sum_{n+1}^{\infty} \dots dx + \int_{2\pi-\eta+\delta_0}^{2\pi+\eta-\delta_0} \dots dx + \int_{4\pi-\eta+\delta_0}^{4\pi+\eta-\delta_0} \dots dx + \cdots \right\} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p\,2\pi} \left\{ \int_{\eta+\delta_0}^{2\pi-\eta-\delta_0} \dots dx + \int_{2\pi+\eta+\delta_0}^{4\pi-\eta-\delta_0} \dots dx + \cdots \right\} \right|$$
$$\leqq \frac{1}{p\,2\pi} \left[p\,2(\eta - \delta_0) F \frac{\varepsilon}{F} + p\,2(\pi - \eta - \delta_0) F \frac{\varepsilon}{F} \right] = \varepsilon \frac{\pi - 2\delta_0}{\pi} < \varepsilon .$$

Die geschweiften Klammern enthalten natürlich genau wie in (10) nur endlich viele Summanden: Es wird integriert über alle die Intervalle (oder ihre Teile) zweiter und dritter Art, die in $(0, p\,2\pi)$ liegen.

(10) und (11) zusammen bedeuten:

Sind $\varepsilon > 0$ und $0 < \eta < \pi$ irgendwie gegeben, so gibt es einen Index $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta)$, so daß

$$(12) \quad \left| \frac{1}{p\,2\pi} \int_0^{p2\pi} f(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k} \cos kx\, dx \right| < \varepsilon$$

ist für jedes p und jedes $n \geqq n_0$.

Und daraus, daß (12) für alle p gilt, ergibt sich noch:

Wird $0 < \eta < \pi$ beliebig, aber fest gewählt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß

$$(13) \quad \frac{1}{\eta} \left| \frac{2}{\pi} M\left\{ f(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k} \cos kx \right\} \right| \leqq \varepsilon$$

ist für $n \geqq n_0(\varepsilon, \eta)$.

Multipliziert man nun (9) mit $\frac{\pi}{\eta}$, so folgt aus (13):

Für jedes feste η mit $0 < \eta < \pi$ ist

$$(14) \quad \frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\, B_\eta(x)\} = a(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k\eta} M\{f(x) \cos kx\}.$$

Nun sei irgendein $\varepsilon > 0$ gegeben und dann $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$ so klein gewählt, daß

$$|f(x+h) - f(x)| \leqq \varepsilon \quad \text{ist für} \quad |h| \leqq \eta_0.$$

Dann ist wegen

$$2\eta f(k2\pi) = \int_{k2\pi-\eta}^{k2\pi+\eta} f(k2\pi)\, dx$$

und wegen

$$\frac{\pi}{\eta} \frac{1}{p2\pi} \int_0^{p2\pi} f(x) B_\eta(x) dx = \frac{1}{\eta 2p} \left\{ \int_0^{\eta} f(x)dx + \int_{2\pi-\eta}^{2\pi+\eta} f(x)dx + \int_{4\pi-\eta}^{4\pi+\eta} f(x)dx + \cdots + \int_{p2\pi-\eta}^{p2\pi} f(x)dx \right\}$$

für jede natürliche Zahl p und jedes $\eta \leqq \eta_0(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{\eta 2p}\left[\int_0^{p2\pi} f(x)B_\eta(x)dx - \left(\eta f(0) + \sum_{k=1}^{p-1} 2\eta f(k2\pi) + \eta f(p2\pi)\right)\right]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\eta 2p}\left[\int_0^{\eta}(f(x)-f(0))dx + \sum_{k=1}^{p-1}\int_{2k\pi-\eta}^{2k\pi+\eta}(f(x)-f(k2\pi))dx + \int_{p2\pi-\eta}^{p2\pi}(f(x)-f(p2\pi))dx\right]\right|$$

$$\leqq \frac{1}{\eta 2p}\, p2\eta\varepsilon = \varepsilon$$

oder anders geschrieben:

$$(15)\qquad \left|\frac{1}{\eta 2p}\int_0^{p2\pi} f(x)B_\eta(x)\,dx - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f(k2\pi) + \frac{f(p2\pi)-f(0)}{2p}\right| \leqq \varepsilon$$

für alle natürlichen p und alle $\eta \leqq \eta_0$.

Hält man η fest, so sind die Summanden nur noch von p abhängig, also einfache Zahlenfolgen. Läßt man $p \to \infty$ gehen, so strebt die erste Folge gegen den Wert $\frac{\pi}{\eta} M\{f(x)B_\eta(x)\}$ und die dritte Folge $\to 0$. Folglich muß die zweite Folge $M_p = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f(k2\pi)$ beschränkt sein, und sind M und N irgend zwei ihrer Häufungspunkte, so folgt ebenso aus (15):

$$\left|M - \frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\,B_\eta(x)\}\right| \leqq \varepsilon, \qquad \left|N - \frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\,B_\eta(x)\}\right| \leqq \varepsilon,$$

also $|M-N| \leqq 2\varepsilon$ „für $\eta \leqq \eta_0(\varepsilon)$“, tatsächlich also für jedes $\varepsilon > 0$, da ja die M_p und also auch ihre Häufungspunkte von η völlig unabhängig sind. Es existiert also

$$M = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f(n2\pi).$$

Mithin wird aus (15):

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta_0(\varepsilon) > 0$, so daß

$$(16)\qquad \left|\frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\,B_\eta(x)\} - M\right| \leqq \varepsilon$$

ist für $\eta \leqq \eta_0(\varepsilon)$.

Das heißt aber:

Es existiert $\lim_{\eta\to 0}\frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\,B_\eta(x)\}$ und es ist

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\pi}{\eta} M\{f(x)\,B_\eta(x)\} = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f(n2\pi).$$

Zusammen mit (14) liefert das die Gleichung

$$(17)\qquad \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f(n2\pi) = a(0) + \lim_{\eta\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}[a(k)+a(-k)].$$

Dabei ist in (14) noch die Umformung

$$M\{f(x)\cos kx\} = M\left\{f(x)\,\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right\} = \frac{1}{2}[a(-k)+a(k)]$$

vorgenommen worden.

Eine (17) entsprechende Gleichung für $\lim \frac{1}{p} \sum_1^p f(n\omega)$ für beliebiges $\omega > 0$ erhält man ganz einfach so:

Setzt man $a_{f(x)}(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$, so ist für $\varkappa > 0$

$$a_{f(\varkappa x)}(\lambda) = a_{f(x)}\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right), \tag{18}$$

weil ja

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\varkappa x)e^{-i\lambda x}\,dx = \frac{1}{T}\frac{1}{\varkappa}\int_0^{\varkappa T} f(u)e^{-i\frac{\lambda}{\varkappa}u}\,du$$

ist. Setzt man daher für $\omega > 0$

$$f_1(x) = f\left(\frac{\omega}{2\pi}x\right),$$

so ist $f_1(n2\pi) = f(n\omega)$ und also

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^p f(n\omega) = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^p f_1(n2\pi).$$

Nach (17) und (18) ist also für $\omega > 0$

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^p f(n\omega) = a(0) + \lim_{\eta\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}\left[a\left(k\frac{2\pi}{\omega}\right) + a\left(-k\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]. \tag{19}$$

Analog folgt aus $a_{f(x+\alpha)}(\lambda) = e^{i\lambda\alpha}a_{f(x)}(\lambda)$

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^p f(n\omega+\alpha) = a(0) + \lim_{\eta\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}\left[a\left(k\frac{2\pi}{\omega}\right)e^{ik\alpha\frac{2\pi}{\omega}} + a\left(-k\frac{2\pi}{\omega}\right)e^{-ik\alpha\frac{2\pi}{\omega}}\right] \tag{20}$$

für jedes reelle α und jedes $\omega > 0$.

Man braucht ja nur $f_1(x) = f(x+\alpha)$ zu setzen und auf die linke Seite von

$$\lim\frac{1}{p}\sum f_1(n\omega) = \lim\frac{1}{p}\sum f(n\omega+\alpha)$$

die Gleichung (19) anzuwenden.

Setzen wir zum Schluß noch $f_1(x) = f(-x)$, so ergibt der verschärfte Mittelwertsatz

$$a_{f_1(x)}(\lambda) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(-x)\,e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\frac{-1}{T}\int_0^{-T} f(u)\,e^{i\lambda u}\,du$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx = a_{f(x)}(-\lambda).$$

Auf $f_1(x)$ können wir (20) mit $\omega > 0$ anwenden und bekommen unter Berücksichtigung von

$$a_{f_1(x)}\left(k\frac{2\pi}{\omega}\right) = a_{f(x)}\left(-k\frac{2\pi}{\omega}\right) = a\left(-k\frac{2\pi}{\omega}\right)$$

die Gleichung

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f_1(n\omega-\alpha)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f(n(-\omega)+\alpha)$$

$$=a(0)+\lim_{\eta\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}\left[a\left(-k\frac{2\pi}{\omega}\right)e^{-ik\alpha\frac{2\pi}{\omega}}+a\left(k\frac{2\pi}{\omega}\right)e^{ik\alpha\frac{2\pi}{\omega}}\right].$$

Das heißt aber gerade: In (20) darf ω auch negativ sein. Damit ist der Satz 2 vollständig bewiesen.

§ 3. Erste Anwendung.

Wir verwenden im folgenden die etwas kürzere Bezeichnung

$$\underset{n}{M}\{f(n\omega+\alpha)\}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f(n\omega+\alpha).$$

Betrachten wir nun einige spezielle Fälle und Folgerungen, die sich aus (20) ergeben.

Es sei $\lambda\gtrless 0$ und $a(k\lambda)\neq 0$ nur für endlich viele ganze Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Dann steht in (20) rechts eine endliche Summe, so daß das lim- mit dem Σ-Zeichen vertauscht werden kann, und wir haben

$$\underset{n}{M}\left\{f\left(n\frac{2\pi}{\lambda}+\alpha\right)\right\}=\sum_{\nu=1}^{n} a(k_\nu\lambda)\,e^{ik_\nu\lambda\alpha}. \tag{21}$$

Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Fourierexponenten von $f(x)$, so ist also für jedes $\lambda\neq 0$, $\pm\frac{\lambda_n}{k}$ ($k\geqq 1$ ganz) sogar

$$\underset{n}{M}\left\{f\left(n\frac{2\pi}{\lambda}+\alpha\right)\right\}=a(0)=\underset{x}{M}\{f(x)\}$$

bei beliebigem α.

Mit $|f(x)|$ ist trivialerweise auch $|\underset{n}{M}\{f(n\omega+\alpha)\}|\leqq F$. Daher legt (21) den Beweis für folgenden speziellen Satz nahe:

Konvergenzsatz. *$f(x)$ sei stetig und fastperiodisch. Gibt es dann eine reelle Konstante c, so daß alle Fourierexponenten in der Form $\lambda_n=\frac{c}{k_n}$ ($k_n\neq 0$ ganz) geschrieben werden können, und sind alle Fourierkoeffizienten $a_n>0$, so ist*

$$\Sigma\, a_n\, e^{i\lambda_n x}$$

absolut und gleichmäßig konvergent.

Beweis. Ist eine natürliche Zahl N gegeben, so wähle man

$$n_0=n_0(N)=\mathrm{Max}\,(|k_1|,|k_2|,\ldots,|k_N|).$$

Unter den ganzzahligen Vielfachen von $\frac{c}{n_0!}$ kommen dann nur endlich viele λ_n vor, darunter aber bestimmt die Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.

Daher ist

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\leqq\sum a\left(k\frac{c}{n_0!}\right)=\underset{n}{M}\left\{f\left(n\frac{2\pi n_0!}{c}\right)\right\}\leqq F.$$

Wegen $a_n>0$ ist daher $\Sigma\, a_n$ konvergent, und daraus folgt ebenfalls wegen $a_n>0$ sofort die Behauptung.

Mit Hilfe der Möbiusschen Funktion $\mu(n)$ kann man in gewissen Fällen die Summanden von (21) trennen:

Es sei $\omega \leqq 0$. Es sei aber $a(k\omega) \neq 0$ nur für endlich viele ganze k, die alle gleiches Vorzeichen haben, also o. B. d. A. $k_1, \ldots, k_n > 0$. Es sei ferner $N \geqq k_\nu$. Setzen wir dann $m_\nu = \underset{n}{M}\left\{f\left(n\frac{2\pi}{\nu\omega}\right)\right\}$, also

$$\begin{aligned}
m_1 &= a(\omega) + a(2\omega) + a(3\omega) + a(4\omega) + \cdots + a(N\omega)\\
m_2 &= \quad a(2\omega) \quad + a(4\omega) + \cdots\\
m_3 &= \quad a(3\omega) \quad + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

so ist

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mu(\nu)\, m_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} a(\nu\omega) \sum_{d|\nu} \mu(d)\,.$$

Denn in der ν-ten Spalte tritt ja in diesem Schema $a(\nu\omega)$ genau dann in der d-ten Zeile auf, wenn $kd = \nu$ ist. Nach einem bekannten Satz der elementaren Zahlentheorie ist

$$\sum_{d|\nu} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \nu = 1 \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

so daß wir haben:

$$a(\omega) = \sum_{\nu=1}^{N} \mu(\nu)\, \underset{n}{M}\left\{f\left(n\frac{2\pi}{\nu\omega}\right)\right\}.$$

Genau so erhält man allgemein für beliebiges $p \geqq 1$:

$$a(p\omega) = \sum_{\nu \geqq 1} \mu(\nu)\, m_{\nu p} = \sum_{\nu \geqq 1} \mu(\nu)\, \underset{n}{M}\left\{f\left(n\frac{2\pi}{\nu p\omega}\right)\right\}.$$

(Es ist $m_\nu = 0$ für $\nu > N$, die Summen brechen also von selbst ab bei dem größten Vielfachen von p, das noch $< N$ ist).

Man braucht, um dies einzusehen, nur das Schema

$$\begin{aligned}
m_p &= a(p\omega) + a(2p\omega) + a(3p\omega) + a(4p\omega) + \cdots\\
m_{2p} &= \quad a(2p\omega) \quad + a(4p\omega) + \cdots\\
m_{3p} &= \quad a(3p\omega) + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

zu betrachten: Es sind einfach alle Indizes mit p multipliziert. Die analoge Anwendung der Funktion $\mu(n)$ ergibt daher den obigen Ausdruck für $a(p\omega)$.

Sind die endlich vielen k, für die $a(k\omega) \neq 0$ ist, nicht alle positiv, so liefert dasselbe Verfahren die Werte

$$a(p\omega) + a(-p\omega) = 2M\{f(x)\cos p\omega x\}\,.$$

Die Voraussetzung, daß $a(k\omega)$ nur für endlich viele k von 0 verschieden ist, ist offenbar sicher dann erfüllt, wenn die Menge aller der Fourierexponenten, die zu ω rational sind, beschränkt ist.

Diese Methode, die Koeffizienten zu trennen, soll aber nicht weiter verfolgt werden, da es eine andere Möglichkeit gibt, die Koeffizienten durch Funktionswerte an äquidistanten Stellen zu bestimmen, die immer durchführbar ist. Dieser anderen Methode gegenüber ist aber zu beachten, daß das eben durchgeführte Verfahren uns gestattet, Fourierkoeffizienten einzig aus Funktionswerten an äquidistanten Stellen selbst zu bestimmen — ohne Benutzung von Exponentialfaktoren und ohne Berücksichtigung des Gesamtverlaufs der Funktion.

Ist $f(x) \sim \Sigma\, a_n e^{i\lambda_n x}$, so ist $f(x)e^{i\lambda x} \sim \Sigma\, a_n e^{i(\lambda_n+\lambda)x}$. Der Koeffizient $a_p = a_{f(x)}(\lambda_p)$ ist also gleich dem freien Glied der Fourierreihe von $f(x)\cdot e^{-i\lambda_p x}$.

Wählen wir eine reelle Zahl $\beta \neq 0, \pm \frac{\lambda_n}{k}, \frac{\lambda_n - \lambda_m}{k}$, so kommen die von 0 verschiedenen ganzzahligen Vielfachen von β nicht unter den Fourierexponenten der Funktionen $f(x)$, $f(x)e^{-i\lambda_1 x}$, $f(x)e^{-i\lambda_2 x}$, ... vor. Wenden wir also (20) auf diese Funktionen an, indem wir (für alle p) $\omega = \frac{2\pi}{\beta}$, $\alpha = 0$ setzen, so bleibt rechts nur das freie Glied der betreffenden Funktion stehen, und wir haben somit

$$a_p = \underset{n}{M}\left\{f\left(n\frac{2\pi}{\beta}\right)e^{-in\lambda_p\frac{2\pi}{\beta}}\right\}. \tag{22}$$

Nach dem Eindeutigkeitssatze ist daher eine fp. Funktion bereits eindeutig bestimmt durch ihre Fourierexponenten und ihre Werte an den Stellen $\frac{2\pi}{\beta}, 2\frac{2\pi}{\beta}, 3\frac{2\pi}{\beta}, \ldots$. Dieses β kann sogar beliebig klein gewählt werden, da ja nur abzählbar viele Werte verboten waren, so daß die Stellen beliebig weit auseinander rücken können.

§ 4. Zweite Anwendung.

Wenn $f(x)$ die Periode 2π hat, ist $\underset{n}{M}\{f(n2\pi + x)\} = f(x)$ und daher

$$f(x) = a(0) + \lim_{\eta\to 0}\sum_{k\neq 0}\frac{\sin k\eta}{k\eta}a(k)\,e^{ikx} \tag{23}$$

Dabei ist nach (22)

$$a(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx = \underset{n}{M}\{f(n)\,e^{-ink}\}.$$

Denn da jetzt $f(x)$ nur ganzzahlige Fourierexponenten hat, darf in (22) für β jede Irrationalzahl, z. B. also 2π gewählt werden.

Die letzte Gleichung erinnert an die Definition der Gleichverteilung:

Eine Zahlenfolge $x_1, x_2, \ldots$ mit $0 \leqq x_n \leqq 1$ heißt in $0 \leqq x \leqq 1$ *gleichverteilt*, wenn die Beziehung

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} h(x_n) = \int_0^1 h(x)\,dx$$

für jede in $0 \leqq x \leqq 1$ eigentlich integrable Funktion $h(x)$ gilt[6]). (Man kann leicht zeigen, daß es genügt, sich auf stetige $h(x)$ mit $h(0) = h(1)$ zu beschränken.)

Die obige Gleichung für $a(k)$ gestattet z. B. einen kurzen Beweis für den Satz:

Ist ϑ irrational, so sind die Zahlen $x_n = n\vartheta - [n\vartheta]$ gleichverteilt in $0 \leqq x \leqq 1$.

Zum Beweis denken wir uns $h(x)$ (stetig und $h(0) = h(1)$) über das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ hinaus periodisch fortgesetzt. Wegen der Periode $P = 1$ sind dann alle Fourierexponenten von $h(x)$ von der Form $k2\pi$, und also alle $a\left(k\frac{2\pi}{\vartheta}\right) = 0$. Daher ist nach (20)

$$\underset{n}{M}\{h(n\vartheta)\} = a(0).$$

Wegen $P = 1$ ist andererseits

$$h(n\vartheta) = h(n\vartheta - [n\vartheta]) = h(x_n)$$

---

[6]) Siehe z. B. Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis **1** (Berlin 1925), Abschn. II, Nr. 162ff.

und also

$$a(0) = \frac{1}{1}\int_0^1 h(x)\,dx = \underset{n}{M}\{h(n\vartheta)\} = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} h(x_n);$$

q. e. d.

Die Reihe (23) ist gleichmäßig konvergent in dem Sinne, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ und ein $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta)$ gibt, so daß

$$\left| f(x) - \left(a(0) + \sum_{1\leqq|k|\leqq n_0} \frac{\sin k\eta}{k\eta}\, a(k)\, e^{ikx}\right)\right| < \varepsilon \tag{24}$$

für alle x gilt [7]).

Das ergibt sich durch Spezialisierung aus der folgenden einfachen Überlegung, die, in anderer Richtung verfolgt, zwangsläufig zu den Begriffen *Periodizitätsgrenze* und *Grenzperiodizität* führen wird.

Es sei $\tau > 0$ und $f(x)$ beliebig fp. Dann ist

$$B_\eta\left(x\frac{2\pi}{\tau}\right) = \frac{\eta}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k}\cos k\frac{2\pi}{\tau}x = \begin{cases} 1 & \text{in} \quad |x - k\tau| < \eta\dfrac{\tau}{2\pi} \\ \dfrac{1}{2} & \text{in} \quad x = k\tau \pm \eta\dfrac{\tau}{2\pi} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Betonungsfunktion mit der Periode τ. Wir bilden

$$\tau\frac{1}{2\eta}\frac{2\pi}{\tau}\,M\left\{f(x)\,B_\eta\left(x\frac{2\pi}{\tau}\right)\right\} = a(0) + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\eta}{k\eta}\,M\left\{f(x)\cos k\frac{2\pi}{\tau}x\right\} + \frac{2}{\eta}\,M\left\{f\{x)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k}\cos k\frac{2\pi}{\tau}x\right\}.$$

Der Faktor $\tau\dfrac{1}{2\eta}\dfrac{2\pi}{\tau}$ dient genau wie der Faktor $\dfrac{\pi}{\eta}$ in (14) dazu, den Mittelwert $\underset{x}{M}\{\ldots\}$ in den Mittelwert $\underset{n}{M}\{\ldots\}$ überzuführen.

Genau so wie (16) bewiesen wurde, kann man auch hier zeigen: Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\left|\frac{\pi}{\eta}\,M\left\{f(x)\,B_\eta\left(x\frac{2\pi}{\tau}\right)\right\} - \underset{n}{M}\{f(n\tau)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{a}$$

ist.

Und völlig analog zu der Herleitung von (13) überzeugt man sich, daß es ein $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta)$ gibt, so daß für $n \geqq n_0$

$$\left|\frac{2}{\eta}\,M\left\{f(x)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k}\cos k\frac{2\pi}{\tau}x\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{b}$$

ist.

(a) und (b) bleiben nun mit demselben η und n_0 gültig, wenn wir statt $f(x)$ die Funktion $f(x + \alpha)$ einsetzen. Bei den Abschätzungen, die zu diesen Ungleichungen führen, werden nämlich genau wie beim Beweis von (13) und (16) von den Eigenschaften der Funktion $f(x)$ nur das δ (hier η) der gleichmäßigen Stetigkeit und die Schranke $F \geqq |f(x)|$ benutzt. Diese bleiben aber beim Übergang zu $f(x + \alpha)$ unverändert. So-

[7]) Diese Tatsache ergibt sich z. B. auch durch Spezialisierung aus einem allgemeinen Satz von A. Hammerstein (Über die Approximation stetiger Funktionen durch Reihen, die nach einem vollständigen Orthogonalsystem fortschreiten, Sitzungsberichte d. Berl. Math. Ges. **25** (1926)).

mit ist dann also, wenn wir x statt α schreiben:

$$\left| \underset{n}{M}\{f(n\tau + x)\} - \left(a(0) + \sum_{1 \leqq |k| \leqq n_0} \frac{\sin k\eta}{k\eta}\, a\left(k\,\frac{2\pi}{\tau}\right) e^{ik\frac{2\pi}{\tau}x}\right)\right| < \varepsilon\,.$$

Hat nun $f(x)$ die Periode 2π, so ist einfach $\tau = 2\pi$ zu setzen. Dann hat man $\underset{n}{M}\{f(n2\pi + x)\} = f(x)$, und damit ist (24) bewiesen.

§ 5. Dritte Anwendung.

$f(x)$ sei wieder beliebig fp. Ist $\varepsilon_1 > 0$ und besitzt $f(x)$ äquidistante zu diesem ε_1 gehörige Verschiebungszahlen, die wir mit $k\tau_1$ bezeichnen wollen, so ist

$$|\underset{n}{M}\{f(n\tau_1 + x)\} - f(x)| \leqq \varepsilon_1$$

und wir haben dann

$$(25) \qquad \left| f(x) - \left(a(0) + \sum_{1 \leqq |k| \leqq n_0} \frac{\sin k\eta}{k\eta}\, a\left(k\,\frac{2\pi}{\tau_1}\right) e^{ik\frac{2\pi}{\tau_1}x}\right)\right| \leqq \varepsilon_1 + \varepsilon\,.$$

Hierdurch wird nun erneut (s. Problemstellung) nahe gelegt, einen Unterschied zu machen zwischen denjenigen fp. Funktionen, die zu jedem $\varepsilon > 0$ äquidistante Verschiebungszahlen besitzen, und denen, für die das nicht zutrifft. Für die erste Klasse darf dann in (25) $\varepsilon_1 + \varepsilon$ beliebig klein gewählt werden — für die zweite dagegen wird sich vermutlich eine untere Schranke $\varepsilon_0 > 0$ herausstellen, unter die man nicht herunterkommt.

Man wird daher außerdem bei jeder einzelnen fp. Funktion die ε danach unterscheiden, ob zu ihnen gehörige äquidistante Verschiebungszahlen existieren oder nicht.

Gehören die äquidistanten Verschiebungszahlen $k\tau$ zu $\varepsilon_1 \geqq 0$, so gehören sie erst recht zu jedem $\varepsilon > \varepsilon_1$.

Daher können wir sagen:

Ist $f(x)$ eine stetige fp. Funktion, so gibt es eine wohlbestimmte Zahl $\varepsilon_0 \geqq 0$ derart, daß $f(x)$ äquidistante Verschiebungszahlen besitzt zu jedem $\varepsilon > \varepsilon_0$, aber zu keinem $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Diese Zahl ε_0 wollen wir *Periodizitätsgrenze* nennen.

Ferner definieren wir:

Eine stetige Funktion $f(x)$ heißt *grenzperiodisch*, wenn ihre Periodizitätsgrenze $\varepsilon_0 = 0$ ist.

H. Bohr nennt eine stetige Funktion grenzperiodisch, wenn sie durch reinperiodische Funktionen beliebig genau gleichmäßig approximiert werden kann.

Daß diese beiden Definitionen inhaltsgleich sind, sieht man leicht ein:

Ist $\varepsilon_0 = 0$, so darf in (25) $\varepsilon_1 + \varepsilon$ beliebig klein gewählt werden. In der runden Klammer steht aber jeweils eine reinperiodische Funktion mit der Periode τ_1, womit der eine Teil der Behauptung erwiesen ist.

Hat umgekehrt $p(x)$ die Periode τ und ist $|f(x) - p(x)| \leqq \varepsilon$ für alle x, so ist für jedes ganze k und alle x

$$|f(x + k\tau) - f(x)| = |f(x + k\tau) - p(x + k\tau) - [f(x) - p(x)]| \leqq 2\varepsilon\,.$$

Gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $p(x)$, so gibt es auch zu jedem $\varepsilon > 0$ äquidistante Verschiebungszahlen, d. h. es ist $\varepsilon_0 = 0$.

Ob äquidistante zu ε_0 selbst gehörige Verschiebungszahlen vorhanden sind oder nicht, läßt sich nicht allgemein sagen. Beide Möglichkeiten kommen vor.

Hat z. B. $f(x)$ die Periode P, so bedeutet ja $f(x + kP) - f(x) = 0$, daß äquidistante Verschiebungszahlen kP vorhanden sind, die zu $0 = \varepsilon_0$ gehören.

Ist andererseits etwa $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{i\frac{x}{n}}$, so zeigt die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe, daß $\varepsilon_0 = 0$ ist $\left(\text{denn } \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} e^{i\frac{x}{n}} \text{ ist ja reinperiodisch}\right)$ und daß diese Reihe zugleich die Fourierreihe von $f(x)$ ist — man braucht nur $f(x)e^{-i\lambda x}$ gliedweise zu integrieren.

Daß es hier aber kein P mit $kP = \tau_{f(x)}(0)$ gibt, daß also diese Funktion $f(0)$ nicht reinperiodisch ist, folgt sofort daraus, daß wenn $f(x)$ die Periode P hätte, bekanntlich jedes $\lambda_n = \frac{1}{n} = k_n \frac{2\pi}{P}$ mit ganzem k_n sein müßte, daß also $\frac{1}{n}$ nicht $\to 0$ streben dürfte. Dies wird am Ende von § 7 mit den Mitteln dieser Arbeit erneut bewiesen werden.

Damit ist zugleich gezeigt, daß die Klasse der grenzperiodischen Funktionen die der reinperiodischen zwar enthält, aber umfassender ist.

Wegen $|f(x+r) - f(x)| \leqq |f(x+r)| + |f(x)| \leqq 2F$ ist jede reelle Zahl eine $\tau_{f(x)}(2F)$, also $\varepsilon_0 \leqq 2F$.

Es gibt sehr einfache Beispiele für Funktionen $f(x)$ mit $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0 \leqq 2\varepsilon < F$, wobei von ε nur $0 < \varepsilon < \frac{F}{2}$ gefordert wird. Unter Vorwegbenutzung der Ergebnisse von § 7 und § 8 können wir z. B. so schließen:

Es sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Wir setzen

$$f(x) = (1 - \varepsilon)e^{ix} + \varepsilon e^{i\pi x} \qquad (F = 1).$$

Da $\frac{1}{\pi}$ irrational ist, muß $\varepsilon_0 > 0$ sein (§ 7).

Es ist

$$|f(x) - (1 - \varepsilon)e^{ix}| = \varepsilon\,|e^{i\pi x}| = \varepsilon\,,$$

und $(1 - \varepsilon)e^{ix}$ ist periodisch, also (s. Beginn von § 8) $\varepsilon_0 \leqq 2\varepsilon$. Aus der Ungleichung (28) von § 7 folgt andererseits

$$\varepsilon_0^2 \geqq \text{Max Min}\,(\boldsymbol{\Sigma}_p, \boldsymbol{\Sigma}_q) = \text{Max Min}\,(|1 - \varepsilon|^2,\ |\varepsilon|^2) = \varepsilon^2\,.$$

Daher ist tatsächlich

$$0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0 \leqq 2\varepsilon < 1 = F\,.$$

§ 6. Vierte Anwendung.

Haben uns unsere Überlegungen dazu geführt, die Existenz äquidistanter Verschiebungszahlen zu jedem $\varepsilon > 0$ als Definition der Grenzperiodizität zu wählen, so müssen wir uns fragen, ob diese Überlegungen und diese Definitionen auch geeignet sind, die Theorie der grenzperiodischen Funktionen zu entwickeln. Das ist der Fall.

In der Tat werden sich für die Hauptergebnisse dieser Theorie [8]), nämlich: Summationsverfahren für die Fourierreihe, Eindeutigkeitssatz, Parsevalsche Gleichung $M\{|f(x)|^2\} = \Sigma\,|a_n|^2$, und $\lambda_n = r_n\alpha$ mit r_n rational, α fest —, höchst einfache und natürliche Beweise ergeben, und zwar für jede Tatsache gesondert, also ohne Berufung auf die Äquivalenz von Approximationssatz, Eindeutigkeitssatz und Parsevalscher Gleichung.

Bei unseren heuristischen Überlegungen hatten wir schon plausibel gemacht, daß der Lebesguesche Beweis des Eindeutigkeitssatzes sogar noch für viel allgemeinere Klassen als die der grenzperiodischen Funktionen durchführbar sein müsse. Da der

[8]) H. Bohr, Grenzperiodische Funktionen, Acta Math. **52** (1929).

Satz 2 ebenfalls durch eine Betonungsmethode gewonnen wurde, ist es nur natürlich, daß seine Anwendung einen Eindeutigkeitsbeweis gestattet, der nach demselben Muster verläuft wie der von Lebesgue, aber viel kürzer ist, da er keiner Integralabschätzungen bedarf.

Eindeutigkeitssatz. *Ist $f(x)$ grenzperiodisch und ist $a(\lambda) \equiv 0$, so ist auch $f(x) \equiv 0$.*

Beweis. Indirekt: Es sei $f(x_0) = d > 0$ und $k\tau_0$ sei eine äquidistante Menge von zu $\frac{d}{2}$ gehörigen Verschiebungszahlen. Dann ist $f(x_0 + k\tau_0) \geqq \frac{d}{2}$ und also

$$\underset{n}{M}\{f(n\tau_0 + x_0)\} \geqq \frac{d}{2} > 0\,.$$

Wegen $a(\lambda) \equiv 0$ muß aber nach Satz 2

$$M\{f(n\tau_0 + x_0)\} = 0$$

sein, q. e. d.

Ungleichung (25) enthält klar den

Approximationssatz. *Jede grenzperiodische Funktion $f(x)$ kann beliebig genau gleichmäßig approximiert werden durch Exponentialpolynome, in denen als Exponenten nur Fourierexponenten von $f(x)$ verwendet werden, und die überdies reinperiodisch sind.*

(25) läßt sich übrigens auch auffassen als Verallgemeinerung eines bereits von Lebesgue für reinperiodische Funktionen angegebenen Summationsverfahrens auf grenzperiodische Funktionen. Als eine noch weitergehende Verallgemeinerung könnte man den Satz 2 selbst auffassen; nur handelt es sich dann nicht mehr um ein Summationsverfahren, da auf der linken Seite kein Funktionswert, sondern ein Mittelwert über äquidistante Funktionswerte steht. Sonst wäre ja auch der allgemeine Eindeutigkeitssatz elementar beweisbar, denn jedes Summationsverfahren konstruiert die Funktion eindeutig aus ihrer Fourierreihe.

Daß schließlich der Quotient zweier Fourierexponenten einer grenzperiodischen Funktion immer rational ist, sowie die Parsevalsche Gleichung $M\{|f(x)|^2\} = \Sigma |a_n|^2$, wird sich nebenbei ergeben, wenn wir uns nun der Aufgabe zuwenden, die Periodizitätsgrenze ε_0 abzuschätzen.

Für den Beweis der Tatsache, daß $f(x)$ grenzperiodisch ist, wenn stets $\frac{\lambda_p}{\lambda_q}$ rational ist, liefern unsere Methoden allerdings keine wesentliche Vereinfachung, so daß auf die Bohrschen Untersuchungen darüber verwiesen werden muß. Der Satz wird von Bohr selbst als tiefgehend bezeichnet: beim Beweis [9]) wird der allgemeine Eindeutigkeitssatz herangezogen. Unter Benutzung des (ebenfalls tiefliegenden!) allgemeinen Approximationssatzes kann man die Behauptung sehr rasch so einsehen: Ist stets $\frac{\lambda_p}{\lambda_q}$ rational, so sind die Approximationspolynome, die nur Fourierexponenten von $f(x)$ verwenden, rein periodisch, also $\varepsilon_0 = 0$.

§ 7. Fünfte Anwendung.

Zur Abschätzung von ε_0 nach unten benutzen wir die folgende, durch einfaches Umformen beweisbare Gleichung:

Sind $c_1, \ldots, c_N$ beliebige komplexe und $\delta_1, \ldots, \delta_N$ irgendwelche reelle Zahlen, so ist

$$(26)\quad M\left\{\left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n\, e^{i\delta_n x}\right|^2\right\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_{n=1}^{N} |a(\delta_n)|^2 + \sum_{n=1}^{N} |c_n - a(\delta_n)|^2\,.$$

[9]) H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. II., Acta Math. **46** (1925).

Ist nun ε_0 die Periodizitätsgrenze von $f(x)$ und

174 *Kaluza jun., Untersuchung fastperiodischer Funktionen mittels äquidistanter Zahlenmengen.*

Ist nun ε_0 die Periodizitätsgrenze von $f(x)$ und $\varepsilon > \varepsilon_0$, so gibt es nach (25) ein $\tau > 0$, ein $\eta > 0$ und ein $n_0 > 0$, so daß

$$\left| f(x) - \left(a(0) + \sum_{1 \leq |k| \leq n_0} \frac{\sin k\eta}{k\eta}\, a\left(k\frac{2\pi}{\tau}\right) e^{ik\frac{2\pi}{\tau}x} \right) \right| < \varepsilon$$

ist. Die Anwendung von (26) ergibt daher

$$M\{|f(x)|^2\} - \sum_{k=-n_0}^{+n_0} \left| a\left(k\frac{2\pi}{\tau}\right) \right|^2 < \varepsilon^2$$

und wegen $\Sigma\, |a_n|^2 \leqq M\{|f(x)|^2\}$ erst recht

$$\sum |a_n|^2 - \sum_{k=-n_0}^{+n_0} \left| a\left(k\frac{2\pi}{\tau}\right) \right|^2 < \varepsilon^2 . \tag{27}$$

Nun sei, falls vorhanden, $\lambda_p \neq 0$ ein Fourierexponent von $f(x)$. Dann bezeichnen wir mit $\lambda_n^{(p)}$ diejenigen Exponenten, für die $\frac{\lambda_n^{(p)}}{\lambda_p}$ rational ist, und mit $\lambda_n^{(q)}$ alle übrigen. Dann ist

$$\Sigma\, |a_n|^2 = \Sigma\, |a(\lambda_n^{(p)})|^2 + \Sigma\, |a(\lambda_n^{(q)})|^2 = \Sigma_p + \Sigma_q$$

mit $\Sigma_p > 0$. Und es ist dann und nur dann $\Sigma_q > 0$, wenn es ein λ_q mit $\frac{\lambda_q}{\lambda_p}$ irrational gibt.

In der Ungleichung (27) werden nun — welchen Wert das von ε abhängige τ auch haben mag — aus der $\Sigma\, |a_n|^2$ entweder nur Glieder von Σ_p oder nur Glieder von Σ_q fortsubtrahiert. Folglich ist

$$\text{Min}\,(\Sigma_p, \Sigma_q) < \varepsilon^2 \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > \varepsilon_0 ,$$

also auch

$$\text{Min}\,(\Sigma_p, \Sigma_q) \leqq \varepsilon_0^2 ,$$

und da das für alle p gilt,

$$\text{Max Min}\,(\Sigma_p, \Sigma_q) \leqq \varepsilon_0^2 . \tag{28}$$

Bei einer grenzperiodischen Funktion muß also, wie oben behauptet, der Quotient zweier Fourierexponenten immer rational sein, denn andernfalls ist $\varepsilon_0 > 0$.

Aus (27) zusammen mit der darüber stehenden Gleichung folgt die Parsevalsche Gleichung für grenzperiodische Funktionen:

Wegen $\varepsilon_0 = 0$ darf $\varepsilon \to 0$ gehen; die linken Seiten sind nichtnegativ und streben daher dann auch $\to 0$. In beiden Gleichungen ist aber der Subtrahent $-\sum_{-n_0}^{+n_0} \cdots$ derselbe, also müssen auch die Minuenden gleich sein:

$$M\{|f(x)|^2\} = \Sigma\, |a_n|^2 .$$

(25) bedeutet für reinperiodisches $f(x)$:

Hat $f(x)$ die Periode P, so kann $f(x)$ beliebig genau gleichmäßig approximiert werden durch Exponentialpolynome, in denen nur Exponenten der Form $k\frac{2\pi}{P}$ (k ganz) zur Verwendung kommen.

In Verbindung hiermit bietet (27) einen kurzen Beweis für die in der Einleitung erwähnte und später benutzte Tatsache dar, daß $a(\lambda) = 0$ ist für $\lambda \neq k\frac{2\pi}{P}$, wenn $f(x)$ die Periode P hat. Die Ungleichung (27) besagt nämlich nach ihrer Herleitung aus (26): Wird die fp. Funktion $f(x)$ durch ein Exponentialpolynom bis auf ε gleichmäßig approximiert, so muß unter den Exponenten des Polynoms jeder Fourierexponent λ_n von

$f(x)$ vorkommen, für den $|a_n|^2 > \varepsilon^2$ ist, denn der Koeffizient $|a_n|^2$ muß dann in (27) aus $\boldsymbol{\Sigma}|a_n|^2$ fortsubtrahiert werden. Da bei reinperiodischem $f(x)$ aber nur Exponenten der Form $k\frac{2\pi}{P}$ verwendet zu werden brauchen, müssen alle Fourierexponenten von $f(x)$ diese Form haben.

§ 8. Sechste Anwendung.

Wir hatten oben schon einmal gezeigt: Hat $p(x)$ die Periode τ und ist $|f(x)-p(x)| \leqq \varepsilon$, so sind die Zahlen $k\tau$ äquidistante zu 2ε gehörige Verschiebungszahlen von $f(x)$. Daraus folgt:

Für jedes $\eta > 0$ und jede reinperiodische Funktion $p(x)$ gibt es ein x_0, so daß

$$|f(x_0) - p(x_0)| > \frac{\varepsilon_0}{2} - \eta$$

ist. Sonst gäbe es ja äquidistante zu $\varepsilon_0 - 2\eta$ gehörige Verschiebungszahlen.

Wegen der Fastperiodizität und der gleichmäßigen Stetigkeit von $|f(x) - p(x)|$ gibt es sogar ein $L > 0$ und ein $\delta > 0$, so daß in jedem Intervall der Länge L mindestens ein Intervall der Länge δ liegt, für dessen sämtliche Elemente dieselbe Ungleichung gilt.

Ist z. B. $f(x) = \cos x + \cos \pi x$, so haben wir

$$\boldsymbol{\Sigma}_p = \boldsymbol{\Sigma}_q = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} \leqq \varepsilon_0^2 .$$

Wählen wir etwa $\frac{\varepsilon_0}{2} - \eta \geqq \frac{\sqrt{2}}{4} - \eta = 0{,}35$, so gilt also:

Zu jeder stetigen reinperiodischen Funktion $p(x)$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle x aus einer relativ dicht liegenden Menge von Intervallen der Länge δ

$$|\cos x + \cos \pi x - p(x)| > 0{,}35$$

ist.

§ 9. Siebente Anwendung.

Will man nun ε_0 nach oben abschätzen, so wird man nach (28) zunächst vermuten:

$$\varepsilon_0^2 = \text{Max Min } (\boldsymbol{\Sigma}_p, \boldsymbol{\Sigma}_q)$$

umsomehr, als das für $\varepsilon_0 = 0$ richtig ist. Die Vermutung ist aber falsch, wie man sich leicht überzeugt:

$\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ seien paarweise linear unabhängige reelle Zahlen. Wir setzen:

$$f(x) = 5e^{i\lambda_1 x} + 4e^{i\lambda_2 x} + 3e^{i\lambda_3 x} + 1e^{i\lambda_4 x}.$$

Dann ist einfach $\boldsymbol{\Sigma}_p = |a_p|^2$ und

$$\text{Max Min } (\boldsymbol{\Sigma}_p, \boldsymbol{\Sigma}_q) = 25 .$$

Für $p = 1$ ist nämlich $\boldsymbol{\Sigma}_1 = 5^2$ und $\boldsymbol{\Sigma}_q = 4^2 + 3^2 + 1^2 = 26$, für jedes $p > 1$ ist aber $\boldsymbol{\Sigma}_p \leqq 16$ und $\boldsymbol{\Sigma}_q > 5^2 = 25$.

Wäre nun tätsächlich $\varepsilon_0 = 5$, so müßte (siehe Herleitung von (27))

$$\varepsilon^2 = 25 + \varepsilon_1 = \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1 > M\{|f(x) - \sum_{1 \leqq |k| \leqq n_0} \ldots|^2\} \geqq \sum_{n=1}^{4} |a_n|^2 - |a_p|^2 > 26$$

sein für jedes $\varepsilon_1 > 0$.

Unter Verwendung von Teilstücken der harmonischen Reihe kann man natürlich auch Beispiele konstruieren, bei denen alle a_n mit $n \geqq 2$ gegenüber a_1 dem Betrage nach vorgeschrieben klein sind.

Darüber hinaus überzeugt man sich aber ebenso leicht sogar davon, daß eine befriedigende Abschätzung der Periodizitätsgrenze nach oben ein mindestens ebenso tiefliegendes Problem ist wie der allgemeine Eindeutigkeitssatz. Ist nämlich wieder F die obere Grenze von $|f(x)|$ und ist $f(x)$ nicht konstant, so ist

$$\Sigma |a_n|^2 \leqq M\{|f(x)^2\} < F^2.$$

Verglichen mit Max Min $(\Sigma_p, \Sigma_q) \leqq \varepsilon_0^2$, wäre also die Abschätzung

$$\varepsilon_0^2 < F^2$$

eine recht grobe. Aus ihr würde aber sofort der Eindeutigkeitssatz folgen. Wäre nämlich für ein fp. $f(x)$

$$a(\lambda) \equiv 0, \quad \text{aber} \quad F > 0,$$

so setze man $F - \varepsilon_0 = d$. Dann gibt es x_0 mit $f(x_0) > F - \frac{d}{3}$, ferner gibt es $\tau > 0$, so daß $k\tau = \tau_{f(x)}\left(\varepsilon_0 + \frac{d}{3}\right)$ ist. Dann ist aber

$$f(x_0 + k\tau) > F - \frac{d}{3} - \varepsilon_0 - \frac{d}{3} = \frac{d}{3}$$

und also auch $\underset{n}{M}\{f(n\tau + x_0)\} > \frac{d}{3} > 0$. Nach Satz 2 muß aber wegen $a(\lambda) \equiv 0$ auch $\underset{n}{M}\{f(n\tau + x_0)\} = 0$ sein.

Eingegangen 12. 2. 1939.

Methoden zur numerischen Auswertung unendlicher Reihen mit reellen konstanten Gliedern.

Von *Bernhard Schilling* in Dresden.

1.
Einleitung.

Bei der numerischen Auswertung einer konvergenten unendlichen Reihe stößt man häufig auf Schwierigkeiten, nämlich dann, wenn die Reihe langsam konvergiert. Wenn eine reelle Größe s durch eine konvergente unendliche Reihe gegeben ist

$$s = \Sigma\, a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

so erhält man durch Berechnung der Teilsumme

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

einen Näherungswert von s, der um so weniger von s abweicht, je größer n ist. Konvergiert die Reihe langsam, so muß n groß sein, damit s_n ein guter Näherungswert von s ist. Ob eine Reihe schnell konvergiert oder nicht, hängt im allgemeinen von dem Verhalten des Quotienten $\vartheta_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ bei wachsenden Werten von k ab. Ist $\vartheta = \lim_{k\to\infty} \vartheta_k = 0$, so konvergiert die Reihe meist schnell, und es sind für verhältnismäßig kleine Werte von n die Teilsummen s_n gute Näherungswerte von s. Wenn $0 < |\vartheta| < 1$ ist, so konvergiert die Reihe langsamer, und ist $|\vartheta| = 1$, so nähern sich die Teilmengen s_n erst für so große Werte von n dem Werte s, daß es meist praktisch unmöglich ist, so viele Glieder der Reihe zu berechnen, wie man zu einem brauchbaren Näherungswert von s benötigt. Zur Behebung solcher Schwierigkeiten sind zwei Wege beschritten worden, die in vielen Fällen zum Ziel führen.

Der eine Weg ist der, daß man versucht, die Reihe in eine schneller konvergierende zu verwandeln. Von Markoff, Euler und Kummer sind hierzu allgemein bekannte Reihentransformationen angegeben worden, die oft in überraschender Weise den gewünschten Erfolg haben. Aber man kann keine allgemeine Vorschrift angeben, die auf irgendeine beliebige Reihe anwendbar ist, vielmehr muß man von Fall zu Fall nach einer geeigneten Reihentransformation suchen, was, wenn es überhaupt gelingt, oft nur mittels besonderer Kunstgriffe möglich ist.

Der andere Weg zur numerischen Auswertung einer konvergenten Reihe besteht darin, daß man den Rest

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

der Reihe $\Sigma\, a_n$ abschätzt. Man versucht zu diesem Zwecke, eine obere und eine untere Schranke für R_n zu ermitteln. Diese Restabschätzungen kommen in der Praxis fast immer auf eines der beiden folgenden Verfahren hinaus:

Es seien *erstens* sämtliche a_n der Reihe positiv. Dann suche man eine Reihe Σb_n mit positiven Gliedern, die geschlossen summiert werden kann und deren Glieder nicht kleiner sind als die entsprechenden Glieder der Reihe Σa_n. Der Wert der Reihe Σb_n ist dann eine obere Schranke für s. Eine untere Schranke kann man in der Weise zu ermitteln suchen, daß man eine Reihe Σc_n mit positiven Gliedern bildet, die geschlossen summiert werden kann und deren Glieder nicht größer sind als die entsprechenden Glieder der Reihe Σa_n. Andrerseits ist auch jede Teilsumme $s_n < s$, d. h. für jedes n ist s_n eine untere Schranke für s. Es sei *zweitens* die Reihe Σa_n eine alternierende Reihe, deren Glieder dem absoluten Werte nach monoton abnehmen. Ist $a_n > 0$ und $a_{n+1} < 0$, so ist $s_n > s > s_{n+1}$, also s_n eine obere und s_{n+1} eine untere Schranke für s.

Solche Restabschätzungen sind aber nur dann praktisch wirkungsvoll, wenn die Differenz der beiden Schranken klein ist, und dies ist gerade dann schwer zu erreichen, wenn die Reihe langsam konvergiert. Ist $|\vartheta| = 1$, wobei ja die Reihe besonders langsam konvergiert, so gelingt es nur selten, eine praktisch brauchbare obere Schranke für s zu finden, und gerade in diesem Falle ist eine solche von besonderem Wert.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, zur numerischen Auswertung von Reihen mit konstanten Gliedern neue Wege zu weisen, die von den bekannten Methoden unabhängig sind. Cauchy [1]) hat ein Konvergenzkriterium angegeben, das noch näher behandelt werden wird. Er ordnet einer Reihe mit bestimmten Eigenschaften eine Funktion $f(x)$ zu, die mit den Gliedern der Reihe in gewisser Beziehung steht. Von der Konvergenz des bestimmten Integrales $\int_1^\infty f(x)dx$ hängt dann die Konvergenz der Reihe ab. Dieses Kriterium legt den Gedanken nahe, eine Restabschätzung dadurch vorzunehmen, daß man für den Rest R_n der Reihe eine obere und eine untere Schranke in Form bestimmter Integrale von zwei Funktionen ermittelt. Führt man diesen Gedanken durch, so zeigt sich, daß der Unterschied zwischen den beiden Schranken in vielen Fällen bei verhältnismäßig kleinen Werten von n sehr klein gemacht werden kann, häufig sogar kleiner als eine vorgegebene Zahl, ohne daß der Wert von n vergrößert werden muß, so daß man s mit vorgeschriebener Genauigkeit berechnen kann. Die praktische Anwendung der hier entwickelten Theorie zeigt, daß sie ziemlich umfassend ist und gerade bei langsam konvergierenden Reihen besonders gute Ergebnisse zeitigt. Natürlich führen auch die hier entwickelten Methoden nicht bei jeder beliebigen Reihe zu dem gewünschten Erfolg.

2.

Es sei

$$\Sigma a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

eine Reihe mit reellen positiven, monoton abnehmenden, konstanten Gliedern, und es gebe für $x \geqq 1$ eine positive und gleichfalls monoton fallende, integrierbare Funktion $f(x)$, für die bei jedem n

$$f(n) = a_n$$

ist. Für eine solche Reihe hat Cauchy das folgende Konvergenzkriterium, das sogenannte Integralkriterium, aufgestellt:

Die Reihe ist dann und nur dann konvergent, wenn die Integralwerte

$$J_n = \int_1^n f(p)dp, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

---

[1]) A. Cauchy, Exercices mathém. **2**, Paris 1827, S. 221.

eine beschränkte Zahlenfolge bilden oder, was dasselbe besagt, wenn das Integral

$$J = \int_1^\infty f(p)dp$$

konvergiert.

In der Tat ist für jede positive ganze Zahl k

$$\int_k^{k+1} f(p)dp \geqq a_{k+1} \geqq \int_k^{k+1} f(p+1)dp = \int_{k+1}^{k+2} f(p)dp.$$

Man kann sich die Zusammenhänge graphisch veranschaulichen, indem man in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem in den Punkten $x = 1, 2, 3, \ldots$ der Abszissenachse bzw. die Werte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ als Ordinaten aufträgt. Dann ist die Funktion $f(x)$ durch eine Kurve dargestellt, die durch die Endpunkte der Ordinaten geht. In dem Intervall $k \leqq x \leqq k+1$ ist überall $f(x) \geqq a_{k+1}$ und $f(x+1) \leqq a_{k+1}$. Daraus folgt für die Teilsumme s_n der Reihe Σa die Ungleichung

$$a_1 + \int_1^n f(p)dp \geqq s_n \geqq a_1 + \int_2^{n+1} f(p)dp.$$

Diese Ungleichung gilt auch dann, wenn die Reihe divergiert, nur konvergieren dann die beiden Integrale nicht für $n \to \infty$. Die Differenz der beiden Integrale

$$\int_1^n f(p)dp - \int_2^{n+1} f(p)dp = \int_1^2 f(p)dp - \int_n^{n+1} f(p)dp$$

ist für jedes n kleiner als $\int_1^2 f(p)dp$ und daher kleiner als a_1, bleibt also unter einer endlichen Schranke.

Es sei jetzt vorausgesetzt, daß die Reihe $\boldsymbol{\Sigma}\, a_n$ konvergiert. Dann kann man in der Ungleichung n über alle Grenzen wachsen lassen, und für die Summe s der Reihe gilt

$$a_1 + \int_1^\infty f(p)dp \geqq s \geqq a_1 + \int_2^\infty f(p)dp.$$

Damit sind eine obere und eine untere Schranke für s angegeben.

Die unendliche Reihe $\boldsymbol{\Sigma}\, a_n$ kann nun dargestellt werden durch

$$s = \boldsymbol{\Sigma}\, a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + R_n,$$

wobei

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

der Rest der Reihe ist. Gilt für jedes $k \geqq n$ die Gleichung $f(k) = a_k$, so ist

$$\int_n^\infty f(p)dp \geqq R_n \geqq \int_{n+1}^\infty f(p)dp.$$

Damit sind eine obere und eine untere Schranke G und g für R_n bestimmt:

$$G = \int_n^\infty f(p)dp, \qquad g = \int_{n+1}^\infty f(p)dp.$$

Für R_n ergibt sich der Näherungswert

$$R_n \approx \tfrac{1}{2}\,(G+g).$$

Die größtmögliche Abweichung A vom genauen Wert ist

$$A = \tfrac{1}{2}\,(G-g) = \tfrac{1}{2}\int_n^{n+1} f(p)dp \leqq \tfrac{1}{2}\,a_n.$$

Für s erhält man mit derselben Annäherung

$$s \approx s_n + \tfrac{1}{2}(G + g).$$

Hierdurch ist bei Berechnung weniger Glieder der Reihe der Wert von s zwischen zwei Schranken eingeschlossen, deren Differenz verhältnismäßig klein ist.

Um R_n genau zu erhalten, müßte man die Differenz zwischen R_n und $\frac{1}{2}(G + g)$ kennen. Für diese Differenz sollen nun eine obere und eine untere Schranke ermittelt werden. In dem Intervall $k \leqq x \leqq k + 1$ ist im allgemeinen

$$\tfrac{1}{2}\Big[\int_k^{k+1} f(p)dp + \int_{k+1}^{k+2} f(p)dp\Big] = \tfrac{1}{2}\int_k^{k+2} f(p)dp \mp a_{k+1},$$

es ist vielmehr

$$a_{k+1} = \tfrac{1}{2}\int_k^{k+2} f(p)dp + b_{k+1},$$

wobei die Korrektion b_{k+1} näher zu bestimmen ist. Für den Rest R_n gilt

$$R_n = \tfrac{1}{2}(G + g) + K_1,$$

wobei

$$K_1 = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

ist. Nun ist

$$b_k = a_k - \tfrac{1}{2}\int_{k-1}^{k+1} f(p)dp = f(k) - \tfrac{1}{2}\int_{k-1}^{k+1} f(p)dp = f_1(k).$$

Es sei vorausgesetzt, daß für jedes $k \geqq n$ die b_k dasselbe Vorzeichen haben, daß die absoluten Beträge dieser b_k mit wachsendem k monoton fallen und daß $|f_1(x)|$ monoton fällt. Dann ist für jedes $k \geqq n$

$$\left|\int_k^{k+1} f_1(q)\,dq\right| \geqq |b_{k+1}| \geqq \left|\int_{k+1}^{k+2} f_1(q)\,dq\right|$$

und daher

$$\left|\int_n^{\infty} f_1(q)\,dq\right| \geqq |K_1| \geqq \left|\int_{n+1}^{\infty} f_1(q)\,dq\right|.$$

Die beiden Schranken

$$G_1 = \int_n^{\infty} f_1(q)\,dq = \int_n^{\infty}\Big[f(q) - \tfrac{1}{2}\int_{q-1}^{q+1} f(p)\,dp\Big]\,dq,$$

$$g_1 = \int_{n+1}^{\infty} f_1(q)\,dq = \int_{n+1}^{\infty}\Big[f(q) - \tfrac{1}{2}\int_{q-1}^{q+1} f(p)\,dp\Big]\,dq$$

haben dasselbe Vorzeichen, nämlich das Vorzeichen der b_k für $k \geqq n$. Daraus ergeben sich die Näherungswerte

$$R_n \approx \tfrac{1}{2}(G + g) + \tfrac{1}{2}(G_1 + g_1), \qquad s \approx s_n + \tfrac{1}{2}(G + g) + \tfrac{1}{2}(G_1 + g_1),$$

und für die Abweichung A_1 vom genauen Wert erhält man

$$A_1 \leqq |\tfrac{1}{2}(G_1 - g_1)|.$$

Dieser zweite Näherungswert für R_n wird sich im allgemeinen wieder von R_n unterscheiden. Es sei

$$R_n = \tfrac{1}{2}(G + g) + \tfrac{1}{2}(G_1 + g_1) + K_2.$$

In dem Intervall $k \leqq x \leqq k + 1$ ist

$$b_{k+1} = \tfrac{1}{2}\int_k^{k+2} f_1(q)dq + c_{k+1},$$

und es ist

$$K_2 = c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots.$$

Nun ist

$$c_k = b_k - \tfrac{1}{2}\int_{k-1}^{k+1} f_1(q)\,dq = f_1(k) - \tfrac{1}{2}\int_{k-1}^{k+1} f_1(q)\,dq = f_2(k).$$

Genügen die c_k denselben Bedingungen wie die b_k und ist $|f_2(x)|$ monoton fallend, so kann man für den absoluten Wert von K_2 wieder eine obere und eine untere Schranke angeben. Für jedes $k \geqq n$ ist

$$\left|\int_{k}^{k+1} f_2(r)\,dr\right| \geqq |c_{k+1}| \geqq \left|\int_{k+1}^{k+2} f_2(r)\,dr\right|,$$

und daher sind die beiden Integrale

$$G_2 = \int_n^\infty f_2(r)\,dr = \int_n^\infty \left[f(r) - \int_{r-1}^{r+1} f(p)\,dp + \tfrac{1}{4}\int_{r-1}^{r+1}\left(\int_{q-1}^{q+1} f(p)\,dp\right)dq\right]dr,$$

$$g_2 = \int_{n+1}^\infty f_2(r)\,dr = \int_{n+1}^\infty \left[f(r) - \int_{r-1}^{r+1} f(p)\,dp + \tfrac{1}{4}\int_{r-1}^{r+1}\left(\int_{q-1}^{q+1} f(p)\,dp\right)dq\right]dr$$

eine obere und eine untere Schranke für den Wert von K_2. Sie haben beide dasselbe Vorzeichen wie die c_k.

Man erhält die dritten Näherungswerte

$$R_n \approx \tfrac{1}{2}(G+g) + \tfrac{1}{2}(G_1+g_1) + \tfrac{1}{2}(G_2+g_2),$$
$$s \approx s_n + \tfrac{1}{2}(G+g) + \tfrac{1}{2}(G_1+g_1) + \tfrac{1}{2}(G_2+g_2),$$

und für die Abweichung A_2 vom genauen Wert ergibt sich

$$A_2 \leqq |\tfrac{1}{2}(G_2 - g_2)|.$$

Dieses Verfahren kann man so oft wiederholen, wie die notwendigen Bedingungen zu Recht bestehen. Man erhält dabei immer bessere Näherungswerte für s. Zur Bestimmung des m-ten Näherungswertes braucht man die Funktionen $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . ., $f_{m-1}(x)$. Es sei h eine positive, ganze Zahl, die nicht größer als $m-1$ ist. Um $f_h(x)$ zu erhalten, berechnet man die Funktionen

$$\psi_1(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(p_1)\,dp_1,$$

$$\psi_2(x) = \int_{x-1}^{x+1}\left(\int_{p_2-1}^{p_2+1} f(p_1)\,dp_1\right)dp_2,$$

$$\psi_3(x) = \int_{x-1}^{x+1}\left[\int_{p_3-1}^{p_3+1}\left(\int_{p_2-1}^{p_3+1} f(p_1)\,dp_1\right)dp_2\right]dp_3,$$

. . . . . .

$$\psi_h(x) = \int_{x-1}^{x+1}\left\{\int_{p_h-1}^{p_h+1}\cdots\int_{p_4-1}^{p_4+1}\left[\int_{p_3-1}^{p_3+1}\left(\int_{p_2-1}^{p_2+1} f(p_1)\,dp_1\right)dp_2\right]dp_3\cdots dp_{h-1}\right\}dp_h.$$

Dann ist

$$f_h(x) = f(x) - \frac{1}{2}\binom{h}{1}\psi_1(x) + \frac{1}{2^2}\binom{h}{2}\psi_2(x) - \frac{1}{2^3}\binom{h}{3}\psi_3(x) + - \cdots + \frac{(-1)^h}{2^h}\binom{h}{h}\psi_h(x).$$

3.

Die Bedingungen für die Bestimmung höherer Näherungswerte sind erfüllt, wenn nicht nur die Funktion $f(x)$, sondern auch ihre Differentialquotienten monotone stetige

Funktionen von x sind. Man erhält dann auch noch bessere Näherungswerte. Es sei vorausgesetzt, daß es einen endlichen Wert von n derart gebe, daß erstens für jede ganze Zahl $k \geqq n$

$$f(k) = a_k,$$

daß zweitens für jedes endliche $x \geqq n$

$$f(x) > 0, \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0, \quad f'''(x) < 0, \ldots$$

und daß drittens

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = \lim_{x\to\infty} f'''(x) = \cdots = 0$$

ist. Man nennt eine solche Funktion eine vollmonoton fallende Funktion. Nach dem Mittelwertsatz ist für hinreichend große Werte von x und k

$$\frac{f(x) - f(k)}{x - k} = f'(k + \theta(x - k)), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Da $f''(x) > 0$ ist, so folgt:

$$\begin{aligned} &\text{Ist} \quad x - k > 0, \quad \text{so ist} \quad f'(k + \theta(x - k)) > f'(k), \\ &\text{ist} \quad x - k < 0, \quad \text{so ist} \quad f'(k + \theta(x - k)) < f'(k). \end{aligned}$$

Es ist daher in beiden Fällen

$$f(x) - f(k) > (x - k) f'(k)$$

oder

$$f(x) > (x - k) f'(k) + f(k),$$

solange $x \neq k$ ist. Für $x = k$ geht die Ungleichung in eine Gleichung über, und es gilt daher für jedes x des Intervalles $k - 1 \leqq x \leqq k + 1$ die Ungleichung

$$f(x) \geqq (x - k) f'(k) + f(k),$$

wobei das Gleichheitszeichen also nur für $x = k$ gilt. Demnach ist

$$\int_{k-1}^{k+1} f(p)\,dp > \int_{k-1}^{k+1} [(p - k) f'(k) + f(k)]\,dp = 2 f(k) = 2a_k$$

oder

$$a_k < \tfrac{1}{2} \int_{k-1}^{k+1} f(p)\,dp\,.$$

Daraus folgt, daß

$$R_n < \tfrac{1}{2}(G + g)$$

ist. R_n liegt also zwischen $\frac{1}{2}(G + g)$ und $\frac{1}{2}(G + g) - \frac{1}{2}(G - g) = g$, und es ergibt sich der Näherungswert

$$R_n \approx \tfrac{1}{4}(G + 3g)$$

mit der Abweichung A' vom genauen Wert

$$A' \leqq \tfrac{1}{4}(G - g).$$

Es folgt weiter sofort, daß

$$b_k = a_k - \tfrac{1}{2} \int_{k-1}^{k+1} f(p)\,dp < 0$$

und somit für jedes endliche $x \geqq n$

$$f_1(x) < 0$$

ist. Die Schranken G_1 und g_1 für K_1 sind also negativ. Für die bisherigen Untersuchungen genügt es, die Monotonie von $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ vorauszusetzen. Die weiteren An-

nahmen werden für höhere Näherungswerte gebraucht. Es läßt sich dann zeigen, daß

$$R_n > \tfrac{1}{2}(G+g) + \tfrac{1}{2}(G_1+g_1)$$

ist. Zu diesem Zwecke muß bewiesen werden, daß die Funktionen $f_1'(x)$ und $f_1''(x)$ das Zeichen nicht wechseln. Aus

$$f_1(x) = f(x) - \tfrac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(p)\,dp$$

folgt durch Differentiation

$$f_1'(x) = f'(x) - \tfrac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)],$$
$$f_1''(x) = f''(x) - \tfrac{1}{2}[f'(x+1) - f'(x-1)].$$

Nach dem Taylorschen Satze ist

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots,$$
$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots.$$

Subtrahiert man die zweite Reihe von der ersten, so erhält man für $h = 1$

$$\frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)] = f'(x) + \frac{1}{3!}f'''(x) + \frac{1}{5!}f^{(5)}(x) + \cdots.$$

Auf der rechten Seite sind für jedes endliche $x \geqq n$ sämtliche Glieder negativ, und daher ist

$$\tfrac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)] - f'(x) > 0$$

und somit

$$f_1'(x) > 0.$$

Entwickelt man $f'(x+h)$ und $f'(x-h)$ in Taylorsche Reihen, so ergibt sich für $h = 1$ die Beziehung

$$\frac{1}{2}[f'(x+1) - f'(x-1)] = f''(x) + \frac{1}{3!}f^{(4)}(x) + \frac{1}{5!}f^{(6)}(x) + \cdots.$$

Die Glieder auf der rechten Seite sind sämtlich positiv für jedes endliche $x \geqq n$, und daher ist

$$\tfrac{1}{2}[f'(x+1) - f'(x-1)] - f''(x) > 0$$

und somit

$$f_1''(x) < 0.$$

Analog zu der oben abgeleiteten Ungleichung für $f(x)$ erhält man demnach für jedes x des Intervalles $k-1 \leqq x \leqq k+1$ die Ungleichung

$$f_1(x) \leqq (x-k)f_1'(k) + f_1(k),$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $x = k$ gilt. Demnach ist

$$\int_{k-1}^{k+1} f_1(q)\,dq < \int_{k-1}^{k+1} [(q-k)f_1'(k) + f_1(k)]\,dq = 2f_1(k) = 2\left[a_k - \tfrac{1}{2}\int_{k-1}^{k+1} f(p)\,dp\right]$$

oder

$$a_k > \tfrac{1}{2}\int_{k-1}^{k+1} f(p)\,dp + \tfrac{1}{2}\int_{k-1}^{k+1} f_1(q)\,dq.$$

Daraus folgt, daß

$$R_n > \tfrac{1}{2}(G+g) + \tfrac{1}{2}(G_1+g_1)$$

ist. R_n liegt also zwischen $\frac{1}{2}(G+g)+\frac{1}{2}(G_1+g_1)$ und

$$\tfrac{1}{2}(G+g)+\tfrac{1}{2}(G_1+g_1)-\tfrac{1}{2}(G_1-g_1)=\tfrac{1}{2}(G+g)+g_1,$$

und es ergibt sich der zweite Näherungswert

$$R_n \approx \tfrac{1}{2}(G+g)+\tfrac{1}{4}(G_1+3g_1)$$

mit der Abweichung A_1' vom genauen Wert

$$A_1' \leqq -\tfrac{1}{4}(G_1-g_1).$$

Ganz analog läßt sich beweisen, daß G_2 und g_2 positive Werte haben und daß

$$R_n < \tfrac{1}{2}(G+g)+\tfrac{1}{2}(G_1+g_1)+\tfrac{1}{2}(G_2+g_2)$$

ist, und man findet den Näherungswert

$$R_n \approx \tfrac{1}{2}(G+g)+\tfrac{1}{2}(G_1+g_1)+\tfrac{1}{4}(G_2+3g_2)$$

mit der Abweichung A_2' vom genauen Wert

$$A_2' \leqq \tfrac{1}{4}(G_2-g_2).$$

Setzt man dies Verfahren fort, so erhält man immer bessere Näherungswerte für R_n, die abwechselnd größer und kleiner als R_n sind.

Wendet man dieses Summationsverfahren z. B. auf die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

an, so erhält man für $n=5$ die erste Näherung

$$s \approx 1{,}6386, \qquad A' < 0{,}0084,$$

die zweite Näherung

$$s \approx 1{,}64508, \qquad A_1' < 0{,}00030,$$

die dritte Näherung

$$s \approx 1{,}644924, \qquad A_2' < 0{,}000038,$$

während die Summe der ersten 20 Glieder der Reihe erst den Wert

$$s_{20} = 1{,}596163$$

ergibt. Auf 6 Dezimalstellen genau ist

$$1{,}6449341 < s < 1{,}6449343.$$

Bei sehr langsam konvergierenden Reihen erhält man oft mit ganz wenig Rechnung einen sehr guten ersten Näherungswert, wie das folgende Beispiel zeigt. Es sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1,1}}$$

gegeben. Für $n=5$ ergibt sich als erster Näherungswert

$$s \approx 10{,}552, \qquad A' < 0{,}040.$$

Die Teilsumme s_5 der ersten 5 Glieder der Reihe ist

$$s_5 = 2{,}154,$$

also etwa der fünfte Teil von s. Dagegen sind die Schranken für den Rest R_5 entsprechend groß, sie haben die Werte

$$G = 8{,}5134, \qquad g = 8{,}3596.$$

Als zweiten Näherungswert erhält man für $n=5$

$$s \approx 10{,}58476, \qquad A_1' < 0{,}00052.$$

Auf 3 Dezimalstellen genau ist

$$10{,}5840 < s < 10{,}5845.$$

4.

Diese Untersuchungen und Ergebnisse lassen sich auch auf gewisse Reihen anwenden, bei denen die Glieder nicht sämtlich dasselbe Vorzeichen haben. Es sei

$$\Sigma \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

eine konvergente unendliche Reihe mit der Eigenschaft, daß sich die Glieder derart in Gruppen zusammenfassen lassen, daß jede Gruppe endlich viele Glieder enthält, die in der Reihe $\Sigma\alpha_n$ unmittelbar hintereinander stehen, und alle Gruppen dasselbe Vorzeichen haben. Es seien mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ die Gruppen bezeichnet, d. h. es sei

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\lambda_1}, \quad \beta_2 = \alpha_{\lambda_1+1} + \alpha_{\lambda_1+2} + \cdots + \alpha_{\lambda_2},$$
$$\beta_3 = \alpha_{\lambda_2+1} + \alpha_{\lambda_2+2} + \cdots + \alpha_{\lambda_3}, \ldots .$$

Die Reihe $\Sigma \alpha_n$ kann man dann darstellen

$$\Sigma \alpha_n = \Sigma \beta_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots .$$

Haben nun die $\beta_\varkappa$ sämtlich dasselbe Vorzeichen — es sei das positive —, bilden sie eine Reihe mit monoton abnehmenden Gliedern und gibt es eine monoton abnehmende Funktion $F(x)$, die von einem bestimmten Werte $x = \nu$ ab für jedes $\varkappa \geqq \nu$ die Gleichung $F(\varkappa) = \beta_\varkappa$ erfüllt, so gelten für den Rest

$$R_\nu = \beta_{\nu+1} + \beta_{\nu+2} + \cdots$$

der Reihe $\Sigma\beta_\nu$ dieselben Bedingungen, wie für die oben behandelte Reihe Σa_n mit lauter positiven Gliedern.

Von besonderer Bedeutung sind hierbei solche Reihen, bei denen jede Gruppe $\beta_\varkappa$ dieselbe Anzahl Glieder hat. Von diesen sind wieder die alternierenden Reihen von Interesse.

Es sei

$$\Sigma \alpha_n = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + - \cdots$$

eine alternierende Reihe, und zwar sei

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > 0, \quad \lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0 .$$

Die Reihe ist konvergent. Weiter sei vorausgesetzt, daß

$$\alpha_1 - \alpha_2 > \alpha_3 - \alpha_4 > \alpha_5 - \alpha_6 > \cdots$$

und

$$\alpha_2 - \alpha_3 > \alpha_4 - \alpha_5 > \alpha_6 - \alpha_7 > \cdots$$

ist. Die Reihe $\Sigma \alpha_n$ kann in der Form geschrieben werden

$$\Sigma \alpha_n = \Sigma \beta_\mu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\mu + \cdots,$$

wobei

$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_3 - \alpha_4, \ldots, \beta_\mu = \alpha_{2\mu-1} - \alpha_{2\mu} = \alpha_{n-1} - \alpha_n, \ldots$$

und $n = 2\mu$ eine gerade Zahl ist. Es sei $f(x)$ eine Funktion von x mit den Eigenschaften, daß für jedes $k \geqq n$

$$f(k) = \alpha_k$$

ist und die Funktion

$$F(x) = f(2x - 1) - f(2x)$$

monoton abnimmt. Nun ist

$$R_n = \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} + - \cdots = \beta_{\mu+1} + \beta_{\mu+2} + \cdots > 0$$

und weiter

$$\beta_\mu = \alpha_{2\mu-1} - \alpha_{2\mu} = \alpha_{n-1} - \alpha_n = F(\mu) = f(2\mu - 1) - f(2\mu) = f(n - 1) - f(n) .$$

Dann sind

$$G = \int_{\mu}^{\infty} F(p)\,dp\,, \qquad g = \int_{\mu+1}^{\infty} F(p)\,dp$$

eine obere und eine untere Schranke für den Rest R_n.

Genügt $F(x)$ noch den weiteren hierzu notwendigen Bedingungen, so kann man wieder höhere Näherungswerte finden. Dann wechselt die Funktion

$$F_1(x) = F(x) - \tfrac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} F(p)\,dp$$

das Zeichen nicht, und man erhält

$$G_1 = \int_{\mu}^{\infty} F_1(q)\,dq\,, \qquad g_1 = \int_{\mu+1}^{\infty} F_1(q)\,dq\,.$$

Genügt auch die Funktion

$$F_2(x) = F_1(x) - \tfrac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} F_1(q)\,dq$$

den notwendigen Bedingungen, so ergibt sich

$$G_2 = \int_{\mu}^{\infty} F_2(r)\,dr\,, \qquad g_2 = \int_{\mu+1}^{\infty} F_2(r)\,dr\,.$$

Ist n eine ungerade Zahl, so schreibt man

$$\Sigma\alpha_n = \gamma_0 - \Sigma\gamma_\nu = \gamma_0 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\nu + \cdots),$$

wobei

$$\gamma_0 = \alpha_1\,, \quad \gamma_1 = \alpha_2 - \alpha_3\,, \quad \gamma_2 = \alpha_4 - \alpha_5, \ldots, \gamma_\nu = \alpha_{2\nu} - \alpha_{2\nu+1} = \alpha_{n-1} - \alpha_n, \ldots$$

und $n = 2\nu + 1$ eine ungerade Zahl ist. Die Reihe $\Sigma\gamma_\nu$ wird dann nach demselben Verfahren angenähert berechnet, und man erhält entsprechende Näherungswerte für $\Sigma\alpha_n$. Ist insbesondere die Funktion $F(x)$ vollmonoton fallend, so erhält man in bekannter Weise noch bessere Näherungswerte.

Wendet man dieses Summationsverfahren z. B. auf die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

an, so erhält man für $n = 10$, also $\mu = 5$ die erste Näherung

$$s \approx 0{,}7845\,, \qquad A' < 0{,}0014\,,$$

die zweite Näherung

$$s \approx 0{,}785423\,, \qquad A_1' < 0{,}000056\,,$$

die dritte Näherung

$$s \approx 0{,}7853964\,, \qquad A_2' < 0{,}0000095\,.$$

Die ersten 10 bzw. 11 Glieder der Reihe ergeben die Summen

$$s_{10} = 0{,}76046 \quad \text{bzw.} \quad s_{11} = 0{,}80808\,.$$

Da $s_{10} < s < s_{11}$ ist, so erhält man für s den Näherungswert

$$s \approx \tfrac{1}{2}(s_{10} + s_{11}) = 0{,}78427 \text{ mit der Abweichung } A_0 < 0{,}02383.$$

Auf 6 Dezimalstellen genau ist

$$0{,}7853981 < s < 0{,}7853982\,.$$

5.

Es sei jetzt wieder

$$\Sigma a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

eine konvergente Reihe, für die es ein n derart gibt, daß

$$a_n \geqq a_{n+1} \geqq \cdots > 0, \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

ist. Häufig stößt man bei der Berechnung des Integrals $\int_n^\infty f(p)dp$ auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Um in einem solchen Falle für den Rest R_n eine obere und eine untere Schranke zu ermitteln, bestimmt man zwei monoton abnehmende, integrierbare Funktionen $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$, die den folgenden Bedingungen genügen. Es sei für jedes $k \geqq n$

$$\Phi(k) \geqq a_k, \quad \varphi(k) \leqq a_k, \quad \int_n^\infty \Phi(x)dx \text{ endlich.}$$

Im übrigen können die Funktionen $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$ ganz beliebig gewählt werden. Dann ergeben sich für den Rest R_n eine obere und eine untere Schranke

$$G = \int_n^\infty \Phi(p)dp, \qquad g = \int_{n+1}^\infty \varphi(p)dp.$$

Insbesondere lassen sich in gewissen Fällen die Funktionen $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$ so bestimmen, daß

$$\Phi(n) + \Phi(n+1) + \cdots \quad \text{und} \quad \varphi(n) + \varphi(n+1) + \cdots$$

konvergente geometrische Reihen sind. Dann kann man G und g ohne Integration finden. Da die Glieder der Reihe Σa_n von einem bestimmten Gliede ab monoton abnehmen, ist, wenn n hinreichend groß ist, für jedes $k \geqq n$

$$0 \leqq \vartheta_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqq 1.$$

Es sei

$$0 \leqq \lim_{k\to\infty} \vartheta_k = \vartheta < 1.$$

Ist n so groß, daß für jedes $k \geqq n$ der Quotient $\vartheta_k < 1$ ist — ein solches n existiert stets —, so gibt es zwei Größen θ_1 und θ_2, die für alle $k \geqq n$ der Ungleichung

$$1 > \theta_1 \geqq \vartheta_{k+1} \geqq \theta_2 \geqq 0$$

genügen. Dann ist für jedes $k \geqq n$

$$\theta_1 \geqq \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \geqq \theta_2,$$

also

$$\theta_1 a_{n+1} \geqq a_{n+2} \geqq \theta_2 a_{n+1}, \qquad \theta_1^2 a_{n+1} \geqq a_{n+3} \geqq \theta_2^2 a_{n+1}, \ \ldots$$

und daher

$$a_{n+1}(1 + \theta_1 + \theta_1^2 + \cdots) \geqq R_n \geqq a_{n+1}(1 + \theta_2 + \theta_2^2 + \cdots).$$

Es sind demnach

$$G = \frac{a_{n+1}}{1 - \theta_1}, \qquad g = \frac{a_{n+1}}{1 - \theta_2}$$

eine obere und eine untere Schranke für R_n.

Dies Verfahren ist auch dann anwendbar, wenn $\vartheta = 0$ ist; es ist dann $\theta_2 = 0$. Ist $\vartheta = 1$, so findet man auf diesem Wege keine endliche obere Schranke, da $\theta_1 = 1$

und $\frac{a_{n+1}}{1-\theta_1}$ unendlich groß ist. Man muß dann versuchen, zwei monoton fallende integrierbare Funktionen $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$ mit den oben genannten Eigenschaften zu ermitteln. Insbesondere lassen sich für Reihen, bei denen

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=1,$$

jedoch

$$\lim_{k\to\infty} k\left[1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right]=\omega>1$$

ist, solche Funktionen $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$ bestimmen.

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$$

gehört zu diesen Reihen, wenn $\lambda>1$ ist. Für sie ist nämlich

$$\lim_{k\to\infty} k\left[1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right]=\lim_{k\to\infty} k\left[1-\frac{k^{\lambda}}{(k+1)^{\lambda}}\right]=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\lambda}}\left[\binom{\lambda}{1}+\binom{\lambda}{2}k^{-1}+\binom{\lambda}{3}k^{-2}+\cdots\right]=\lambda.$$

Es sei

$$\Sigma a_n$$

eine unendliche Reihe, bei der von einem bestimmten n ab

$$a_n\geqq a_{n+1}\geqq a_{n+2}\geqq\cdots>0, \quad \lim_{k\to\infty}a_k=0$$

ist, und für die nach dem Raabeschen Kriterium die hinreichende Konvergenzbedingung

$$\lim_{k\to\infty} k\left[1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right]=\omega>1$$

erfüllt ist. Für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\omega}}$$

ist dieser Grenzwert ebenfalls gleich ω. Dann kann man von einem bestimmten n ab die Reihe Σa_n zwischen zwei Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu}} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\nu}}$$

einschließen, wobei

$$\mu\geqq\omega\geqq\nu>1$$

ist. Es sei $\varepsilon>0$ eine Größe, die der Ungleichung

$$\omega-2\varepsilon>1$$

genügt. Es seien weiter

$$\mu=\omega+2\varepsilon, \quad \nu=\omega-2\varepsilon.$$

Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} k\left[1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\mu}\right]=\mu, \quad \lim_{k\to\infty} k\left[1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\nu}\right]=\nu.$$

Demnach läßt sich eine positive ganze Zahl n so bestimmen, daß für jedes $k \geqq n$

$$\left| k\left[1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right] - \omega \right| \leqq \varepsilon, \quad \left| k\left[1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\mu}\right] - \mu \right| \leqq \varepsilon,$$

$$\left| k\left[1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\nu}\right] - \nu \right| \leqq \varepsilon$$

ist. Daher ist für jedes $k \geqq n$

$$k\left[1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\mu}\right] \geqq k\left[1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right] \geqq k\left[1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\nu}\right],$$

also

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\mu} \leqq \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqq \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\nu}.$$

Daraus folgt für $k = n$

$$a_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\nu} \geqq a_{n+1} \geqq a_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Ungleichung ergibt sich für $k = n + 1$

$$a_n\left(\frac{n}{n+2}\right)^{\nu} \geqq a_{n+2} \geqq a_n\left(\frac{n}{n+2}\right)^{\mu}.$$

Ist $h > 0$ eine beliebige ganze Zahl, so erhält man für $k = n + h$

$$a_n\left(\frac{n}{n+h}\right)^{\nu} \geqq a_{n+h} \geqq a_n\left(\frac{n}{n+h}\right)^{\mu}.$$

Für den Rest R_n der Reihe Σa_n findet man also

$$a_n n^{\nu}\left(\frac{1}{(n+1)^{\nu}} + \frac{1}{(n+2)^{\nu}} + \cdots\right) \geqq R_n \geqq a_n n^{\mu}\left(\frac{1}{(n+1)^{\mu}} + \frac{1}{(n+2)^{\mu}} + \cdots\right).$$

Es seien nun die beiden Funktionen $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$ folgendermaßen definiert:

$$\Phi(x) = \frac{1}{x^{\nu}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x^{\mu}}.$$

Diese Funktionen sind integrierbar und lassen sich zur Berechnung einer oberen und einer unteren Schranke für den Rest R_n der Reihe Σa_n verwenden. Ist

$$G_{\Phi} = \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{\nu}}, \quad g_{\Phi} = \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\nu}}, \quad G_{\varphi} = \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}, \quad g_{\varphi} = \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}},$$

so sind

$$G = a_n n^{\nu} G_{\Phi} = a_n n^{\nu} \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{\nu}}, \qquad g = a_n n^{\mu} g_{\varphi} = a_n n^{\mu} \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}$$

eine obere und eine untere Schranke für R_n.

Für die Berechnung eines guten Näherungswertes wird man μ und ν so wählen, daß ihre Differenz so klein wie möglich ist. Es ist im allgemeinen nicht notwendig, daß sich die beiden Größen μ und ν von ω wesentlich unterscheiden, es kann sogar häufig eine der beiden gleich ω gesetzt werden. Weiter ist folgendes zu beachten. Für jede ganze Zahl $h > 0$ gilt die Ungleichung

$$\left(\frac{n}{n+h}\right)^{\nu} \geqq \frac{a_{n+h}}{a_n} \geqq \left(\frac{n}{n+h}\right)^{\mu},$$

wenn n hinreichend groß und $\mu > \omega > \nu$ ist. Läßt man aber zu, daß eine der beiden Größen μ und ν mit ω übereinstimmt, so muß unter Umständen für ein gegebenes n in den Ausdrücken links und rechts in der letzten Ungleichung an Stelle von n eine andere ganze Zahl $m > 0$ treten. Man vergleicht dann nicht die Glieder gleicher Nummer der drei Reihen $\sum a_n$, $\sum \frac{1}{n^\nu}$, $\sum \frac{1}{n^\mu}$ miteinander, sondern man vergleicht das n-te Glied der Reihe $\sum a_n$ mit den m-ten Gliedern der Reihen $\sum \frac{1}{n^\nu}$ und $\sum \frac{1}{n^\mu}$, so daß für jede ganze Zahl $h > 0$

$$\left(\frac{m}{m+h}\right)^\nu \geqq \frac{a_{n+h}}{a_n} \geqq \left(\frac{m}{m+h}\right)^\mu$$

ist. Man wird nun bei gegebenem n die größte Zahl m suchen, für die diese Ungleichung gilt. Die obere und die untere Schranke für R_n sind dann gegeben durch die Integrale

$$G = a_n m^\nu \int_m^\infty \frac{dx}{x^\nu}, \qquad g = a\, m^\mu \int_{m+1}^\infty \frac{dx}{x^\mu}.$$

Da $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$ vollmonoton fallende Funktionen sind, kann man die Schranken für R_n noch verbessern. Es ist nach früheren Ergebnissen

$$\frac{1}{2} a_n m^\nu (G_\Phi + g_\Phi) > R_n.$$

Ferner bildet man die Funktion

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \varphi(p)\,dp$$

und die Integrale

$$G'_\varphi = \int_m^\infty \varphi_1(q)\,dq, \qquad g'_\varphi = \int_{m+1}^\infty \varphi_1(q)\,dq.$$

Dann ist

$$\frac{1}{2} a_n m^\mu [(G_\varphi + g_\varphi) + (G'_\varphi + g'_\varphi)] < R_n.$$

Damit sind für R_n eine obere und eine untere Schranke gefunden:

$$G^* = \frac{1}{2} a_n m^\nu (G_\Phi + g_\Phi), \qquad g^* = \frac{1}{2} a_n m^\mu [(G_\varphi + g_\varphi) + (G'_\varphi + g'_\varphi)],$$

die einen besseren Näherungswert ergeben als die Schranken G und g.

Wendet man dieses Summationsverfahren z. B. auf die Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{(2n-1)} + \cdots = \frac{\pi}{2}$$

an, so ergibt sich

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k-1)^2}{2k(2k+1)}, \qquad \lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{6k-1}{4k+2} = 1{,}5 = \omega.$$

Für $k \geqq 7$ ist

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{1,4} > \frac{a_{k+1}}{a_k} > \left(\frac{k-1}{k}\right)^{1,5},$$

es ist also $\nu = 1{,}4$ und $\mu = \omega = 1{,}5$. Für $n = 7$ erhält man die erste Näherung mittels G und g:

$$s \approx 1{,}583 \text{ mit der Abweichung } A < 0{,}034,$$

die zweite Näherung mittels G^* und g^*:

$$s \approx 1{,}583 \text{ mit der Abweichung } A^* < 0{,}027.$$

Ist $k \geqq 14$, so ist

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{1,45} > \frac{a_{k+1}}{a_k} > \left(\frac{k-1}{k}\right)^{1,5};$$

es ist also $\nu = 1{,}45$ und $\mu = \omega = 1{,}5$. Für $n = 14$ erhält man die erste Näherung

$$s \approx 1{,}5744 \text{ mit der Abweichung } A < 0{,}0111,$$

die zweite Näherung

$$s \approx 1{,}5743 \text{ mit der Abweichung } A^* < 0{,}0084.$$

Die Summe der ersten 14 Glieder der sehr langsam konvergierenden Reihe ergibt erst den Wert

$$s_{14} = 1{,}41958.$$

Auf 4 Dezimalstellen genau ist

$$1{,}57079 < s < 1{,}57080.$$

6.

Die bisherigen Untersuchungen erstreckten sich auf unendliche Reihen, deren Glieder von einer bestimmten Stelle ab monoton abnehmen und das Vorzeichen nicht wechseln, oder auf Reihen, die sich auf solche zurückführen lassen. Es fragt sich, ob man die Betrachtungen so verallgemeinern kann, daß sie auch auf andere konvergente Reihen anwendbar sind. Es sei

$$\Sigma a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

eine konvergente Reihe, deren Glieder keinen Bedingungen unterworfen sind. Es sei n eine bestimmte positive ganze Zahl und für jedes $k \geqq n$ sei ϱ_k der größere und σ_k der kleinere der beiden Werte a_k und a_{k+1}. Es sei nun $\Phi(x)$ eine integrierbare Funktion von x, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. für jedes $k \geqq n$ ist $\Phi(k) \geqq \varrho_k$,
2. im Intervall $k < x < k+1$ ist $\Phi(x) \geqq a_{k+1}$,
3. für $x \geqq n$ ist $\Phi(x)$ endlich und $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = 0$,
4. $\int\limits_n^\infty \Phi(x)\,dx$ ist endlich.

Es sei ferner $\varphi(x)$ eine integrierbare Funktion von x, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. für jedes $k \geqq n$ ist $\varphi(k) \leqq \sigma_k$,
2. im Intervall $k < x < k+1$ ist $\varphi(x) \leqq a_{k+1}$,
3. für $x \geqq n$ ist $\varphi(x)$ endlich und $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$,
4. $\int\limits_n^\infty \varphi(x)\,dx$ ist endlich.

Dann ist für jedes $x \geqq n$ sicher $\Phi(x) \geqq \varphi(x)$, und für jedes Intervall $k \leqq x \leqq k+1$ ist

$$\int\limits_k^{k+1} \Phi(p)\,dp \geqq a_{k+1} \geqq \int\limits_k^{k+1} \varphi(p)\,dp.$$

Demnach sind

$$G = \int_n^\infty \Phi(p)dp\,, \qquad g = \int_n^\infty \varphi(p)dp$$

eine obere und eine untere Schranke für den Rest R_n, und man erhält den Näherungswert

$$R_n \approx \tfrac{1}{2}(G+g) = \tfrac{1}{2}\int_n^\infty [\Phi(p) + \varphi(p)]dp;$$

dabei ist die größtmögliche Abweichung A vom genauen Wert

$$A \leqq \tfrac{1}{2}(G-g) = \tfrac{1}{2}\int_n^\infty [\Phi(p) - \varphi(p)]dp\,.$$

Der Wert $\frac{1}{2}(G+g)$ wird im allgemeinen von R_n verschieden sein, und ebenso ist im allgemeinen

$$\tfrac{1}{2}\int_k^{k+1} [\Phi(p) + \varphi(p)]dp \neq a_{k+1}\,.$$

Vielmehr ist

$$a_{k+1} - \tfrac{1}{2}\int_k^{k+1} [\Phi(p) + \varphi(p)]dp = b_{k+1}\,.$$

Es sei

$$R_n = \tfrac{1}{2}(G+g) + K_1\,.$$

Dann ist

$$K_1 = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots.$$

Diese unendliche Reihe ist sicher konvergent.

Sind $\Phi_1(x)$ und $\varphi_1(x)$ zwei integrierbare Funktionen von x, die in bezug auf die Reihe Σb_n dieselben Eigenschaften haben wie die Funktionen $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$ in bezug auf die Reihe Σa_n, so kann man für K_1 eine obere und eine untere Schranke angeben:

$$G_1 = \int_n^\infty \Phi_1(q)\,dq, \qquad g_1 = \int_n^\infty \varphi_1(q)\,dq\,.$$

Ob G_1 und g_1 zu einem besseren Näherungswert führen als die Schranken G und g, hängt von den Funktionen $\Phi_1(x)$ und $\varphi_1(x)$ ab und muß in jedem Falle besonders untersucht werden.

Eingegangen 15. Februar 1939.